経営経済数学

コーシー列と部分列

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

単調増加列，単調減少列

- **定義**：　数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は
  - 単調増加（非減少）　⇔ $\forall k = 1,2,\cdots$:　$a_k < a_{k+1}$ $(a_k \leq a_{k+1})$
  - 単調現象（非増加）　⇔ $\forall k = 1,2,\cdots$:　$a_k > a_{k+1}$ $(a_k \geq a_{k+1})$
  - 上に有界　⇔ ある実数 q が存在して，
    任意の k=1,2,... に対して $q \geq a_k$
  - 下に有界　⇔ ある実数 q が存在して，
    任意の k=1,2,... に対して $q \leq a_k$

注意：a_k は単調非減少（上に有界）

⇔ $-a_k$ は単調非増加（下に有界）

具体例：

- $a_k = k$ や $a_k = k^2$ は 単調非減少，上に有界ではない
- $a_k = 1 - 1/k$ は　単調非減少，上に有界である
- $a_k = 0$　は　　単調非減少，単調非増加，上に有界，下に有界

上に有界で単調非減少な数列の性質

- **定義**: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実数 c に**収束する**

  ⇔ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon$

- **定理**: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は，次のいずれかの条件を満たすと収束
  - 上に有界で単調非減少
  - 下に有界で単調非増加

例:

$a_k = 1 - 1/k$ は　単調増加，上に有界である

➔ 1 に収束

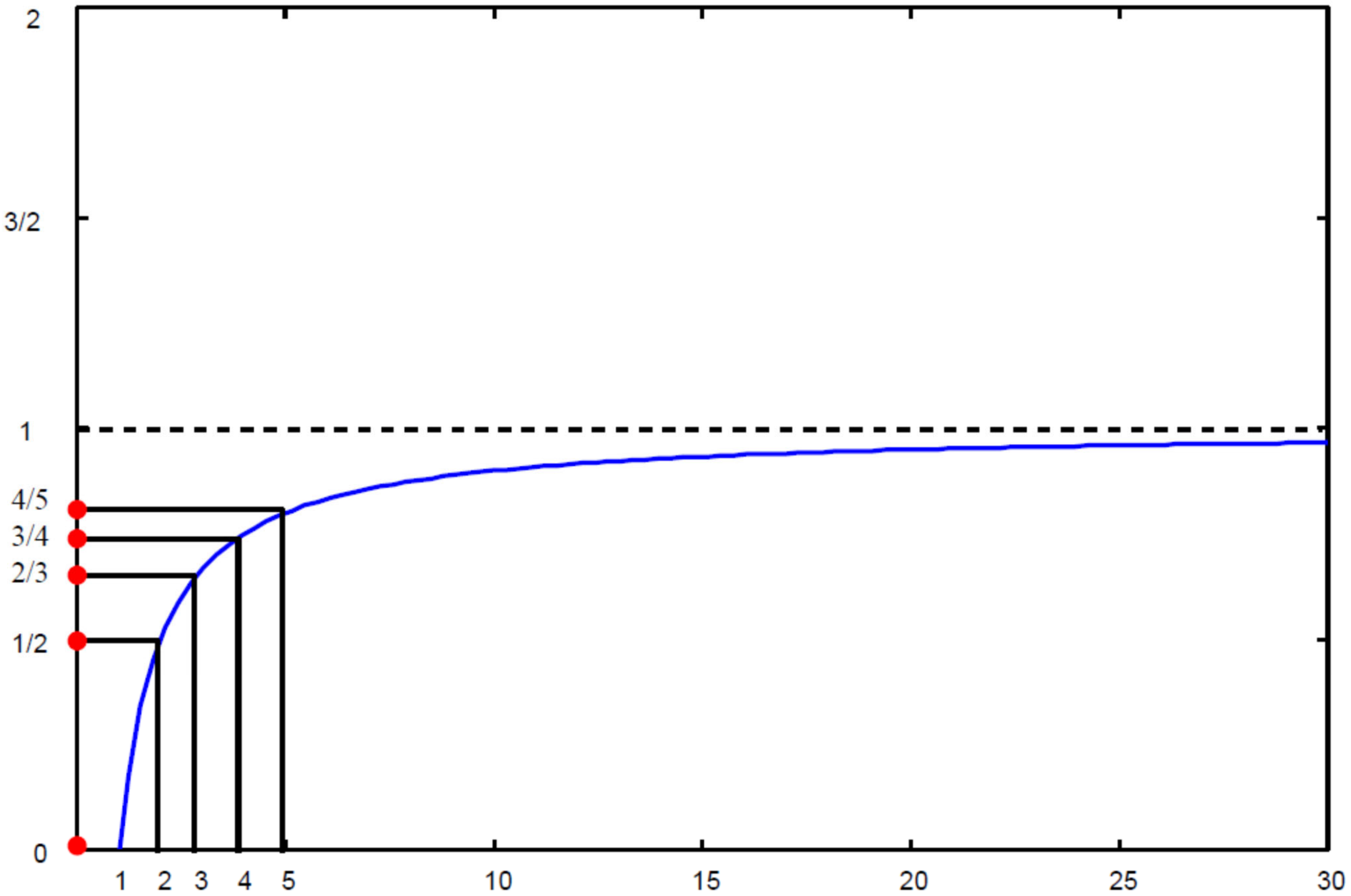
$a_k = k^2$ は 単調増加，上に有界ではない

➔ +∞ に発散

$a_k = (-1)^k$ は　単調増加ではない，上に有界である

➔ どの値にも収束しない，発散しない

上に有界で単調増加する数列の例: $a_n = 1 - 1/n$



水谷友彦先生(静岡大)作成

(a_n) を数列とする.

上に有界，上界

ある実数 u が存在してどんな自然数 n に対しても

$$a_n \leq u$$

となるとき，(a_n) は上に有界であるという．このような u を (a_n) の上界という.

上限

(a_n) の上界の中で一番小さいものを上限という．(a_n) の上限 u^* は以下を満たす.

(1) どんな自然数 n に対しても $a_n \leq u^*$

(2) ある実数 u はどんな自然数 n に対しても $a_n \leq u$ ならば $u^* \leq u$

水谷友彦先生（静岡大）作成

上に有界で単調非減少な数列の性質

- 定理: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は, 次のいずれかの条件を満たすと収束
  - 上に有界で単調非減少 (このとき, 上限値に収束)
  - 下に有界で単調非増加 (このとき, 下限値に収束)

証明の概略:

上に有界 → 定理5.4より上限cが存在

数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$の極限が c であることを示す ■

定理5.4: 実数の集合 M に対し,

M に対して上界が存在 ➔ 上限(最小上界)が存在

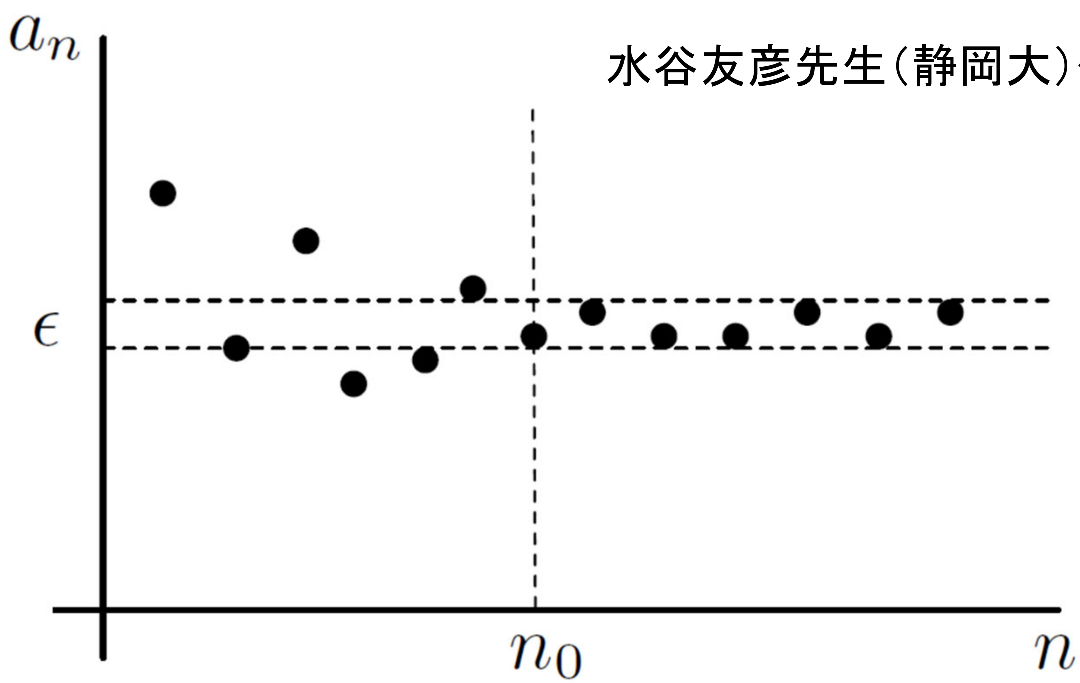
下界が存在 ➔ 下限(最大下界)が存在

コーシー列

- 定義：　数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$はコーシー列（基本列）

　$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}:\quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$

イメージ：数列の収まる幅が徐々に狭くなる



水谷友彦先生（静岡大）作成

コーシー列の例

$a_k = 0,\quad a_k = 1 - 1/k,\quad a_k = 0.5^k,\quad a_k = \sqrt{2}$ の小数点k桁まで

$\varepsilon = 0.1$ のとき，　k_0 をどう選べばよい？

コーシー列の性質

収束のイメージ: 数列がある一点に近づいていく

- 定理9.2: 数列$a_1, a_2, a_3, \dots$は

収束する ←→ コーシー列

[→] は演習問題(数列が収束することの定義を使う)

[←] の証明の概略

$A_k = \{a_{k'} | k' = k, k+1, \dots\}$ (k=1,2,...) とおく

→ A_k は有界，とくに下界が存在 → 定理5.4より下限 b_k が存在

b_k は単調非減少，上に有界　∴ 極限 b が存在.

この b は数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ の極限になっている.　■

定理5.4: 実数の集合 M に対し,

M に対して上界が存在 → 上限(最小上界)が存在

下界が存在 → 下限(最大下界)が存在

距離空間の復習

- 定義: 距離空間 (X, d) とは,

  集合 X と，その各要素の間の距離を与える距離関数 d の対
- 定義: $d: X \times X \to \mathbb{R}$ は距離関数 ⇔ 以下の4条件を満たす

  (0) 任意の x,y∈X に対し， d(x,y)≧0

  (1) 任意の x,y∈X に対し， d(x,y) = 0 ⇔ x = y

  (2) 任意の x,y∈X に対し， d(x,y) = d(y,x)

  (3) [三角不等式] 任意の x,y,z∈X に対し，d(x,z)≦d(x,y)+d(y,z)

  ※ 条件 (0) は不要（他の条件から導出可能）

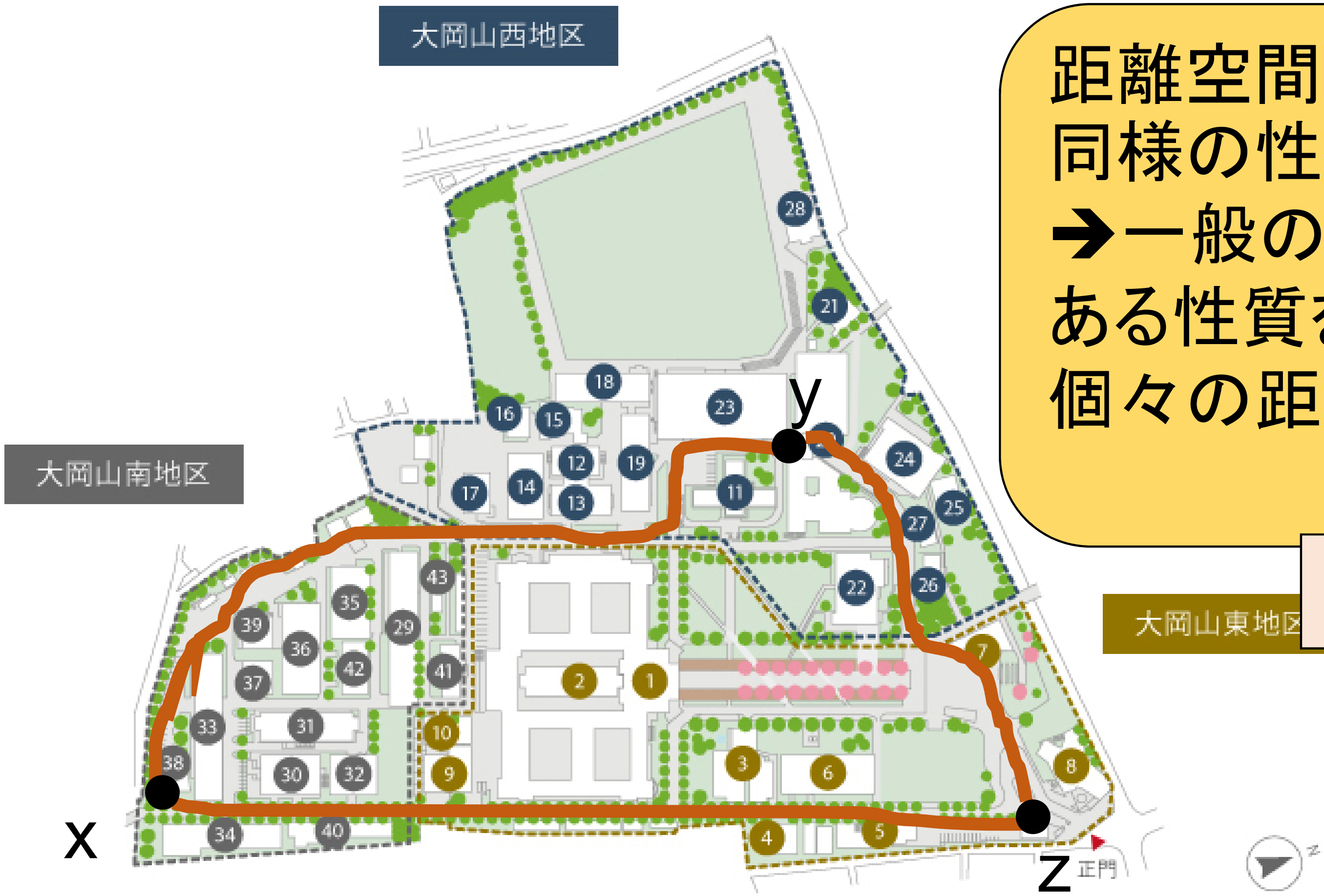
- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は $x \in X$ に収束

  ⇔ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$
- 定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は 収束点列

  ⇔ ある x∈X が存在して，点列は x に収束

距離空間の例

- X = 道路上の地点の集合
- d(x,y) = x 地点から y 地点への最短ルートの距離



距離空間には様々な例が存在し，
同様の性質が成り立つ
➔一般の距離空間に対して，
ある性質を証明できれば，
個々の距離空間に対して
証明する必要なし

抽象化することの利点

コーシー列の距離空間への一般化

- 定義: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ はコーシー列
  ⇔ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$

2つの実数 x,y の距離を d(x,y) = |x − y| と定義

→ 定義の条件の書き換え

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow d(a_{k'}, a_k) < \varepsilon$$

同様にして，距離空間 (X, d) に対してコーシー列を定義

- 定義: 距離空間 (X, d) の点列$x_1, x_2, x_3, \ldots$ はコーシー列
  ⇔ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k', k \geq k_0 \Rightarrow d(x_{k'}, x_k) < \varepsilon$

収束点列とコーシー列

- 定理:　距離空間 (X, d) の任意の点列$x_1, x_2, x_3, \ldots$ は
　　収束する ➔ コーシー列

証明は演習問題

その逆「コーシー列➔収束点列」は成り立つとは限らない

- 定義:　距離空間 (X, d) は完備距離空間
　　⇔ 任意のコーシー列が収束する

完備でない距離空間の例1

- X = 実数の開区間 (a,b),　d(x,y)=|x − y|

  例: (0,1) 区間の点列 $a_k = 1/k$ は

  コーシー列であり，0 に収束するが，$0 \notin X$

- X = 有理数全体の集合,　d(x,y)=|x − y|

  例:「$a_k =$ $\sqrt{2}$ の小数点k桁まで」は

  コーシー列であり，$\sqrt{2}$ に収束するが，$\sqrt{2} \notin X$

- X = 区間[-1,+1]上の実数値連続関数全体 C[-1,+1]

$$d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

コーシー列の収束先が非連続関数になる例が存在

完備でない距離空間の例2

- X = 区間[-1,+1]上の実数値連続関数全体 C[-1,+1]

$$d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)| dx$$

コーシー列の収束先が非連続関数になる例が存在

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0, \\ kx & 0 < x < \frac{1}{k}, \\ 1 & \frac{1}{k} \le x \le 1 \end{cases}$$

極限は

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le 0, \\ 1 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ユークリッド空間の完備性

- 定理: n次元ユークリッド空間の
  任意のコーシー列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は収束する

証明の概略:

$a_k(i)$ = ベクトル a_k の第 i 成分とおく.

各 i = 1,2,…,n に対し, $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ は数列で, コーシー列

∴ $a_1(i), a_2(i), a_3(i), \ldots$ はある実数 $a(i)$ に収束

∴ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ はベクトル $a = (a(1), a(2), \ldots, a(n))$ に収束

数列·点列の有界，非有界

- 定義：実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は有界
  ⟺ ある実数 q が存在して，-q≦ a_k ≦+q (k=1,2,...)
- 定義：実数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は非有界 ⟺ 有界ではない
  ⟺任意の実数 q に対し，ある k が存在して，-q > a_k または a_k > +q

- 定義：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は有界
  ⟺ ある実数 q が存在して，d(0, a_k) = ||0 − a_k||≦+q (k=1,2,...)
- 定義：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は非有界
  ⟺ 有界ではない

命題：n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は，収束するならば有界

※　有界でも収束しない例が存在：　$a_k = (-1)^k$

部分列と極限

- 点列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の部分列

  --- 点列 の一部を抜き出した点列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$

  ただし$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$

命題: 点列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ がcに収束するとき,

その任意の部分列も c に収束する.

(証明の概略) 収束の定義を使えばすぐ分かる. ■

定理: 任意の有界な数列は, 収束する部分列をもつ.

(証明は結構大変)

この定理を使うと, 以下を得ることが可能

定理: 任意の有界な n次元ベクトルの列は, 収束する部分列をもつ.