

電気回路第一

第8回. ラプラス変換の応用 過度応答: 2次の系

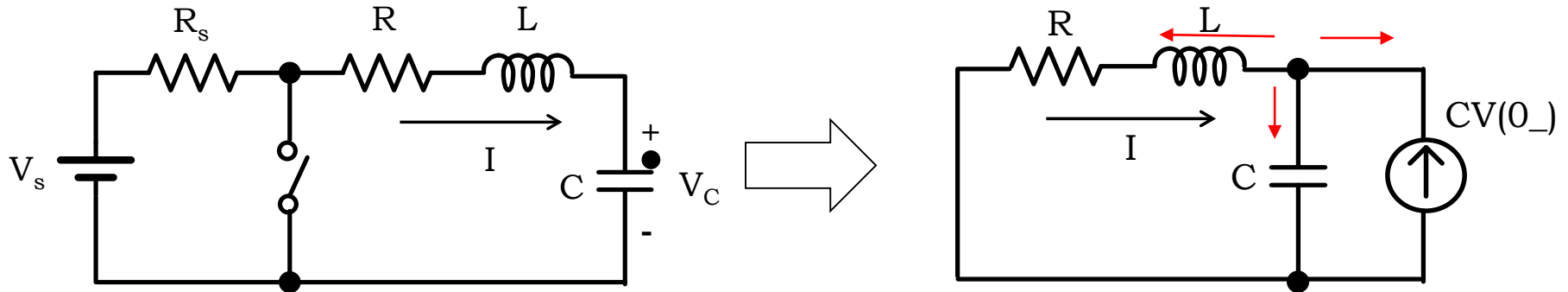
東京工業大学
工学院 電気電子系
ファム ナム ハイ

RLC直列回路の自然応答

3

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

時刻 $t = 0$ において、スイッチを入れる。 V_c の時間応答を求めよ。



キルヒホッフの電流則より, $sCV_c + \frac{V_c}{R + sL} - CV(0_-) = 0$

$$V_c = \frac{\left(s + \frac{R}{L}\right)}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} V(0_-)$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} = \boxed{-\frac{R}{2L}} \pm \boxed{\frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}}}$$

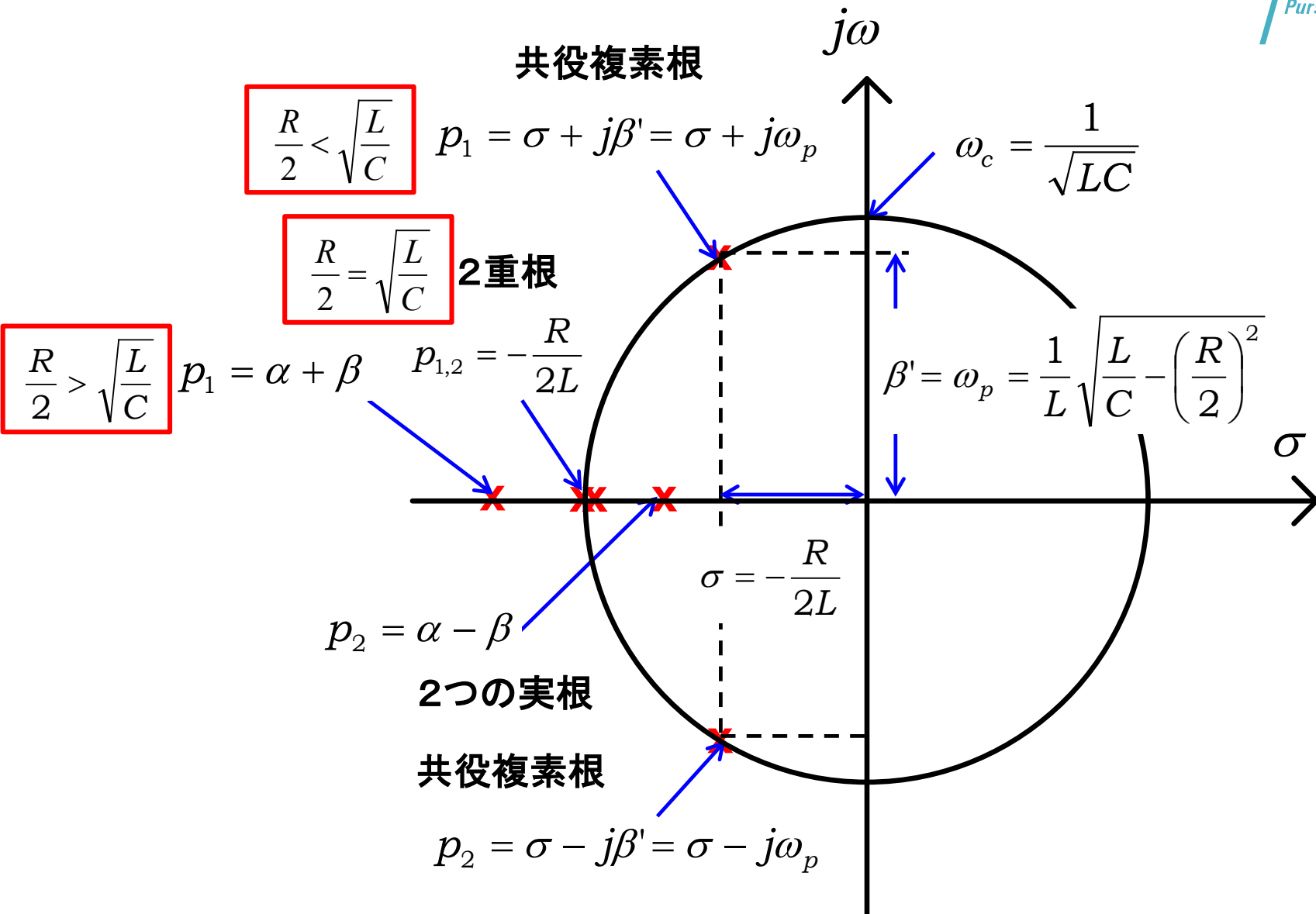
実数(α)

実数(β) or 虚数($j\beta'$)

RLC直列回路の自然応答：極

4

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



RLC直列回路の自然応答：2つの実根の場合(1)

5

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$\frac{R}{2} > \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \alpha = -\frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}}$$

$$p_1 = \alpha + \beta$$

$$p_2 = \alpha - \beta$$

$$V_c = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$

ただし、

$$K_1 = \frac{p_1 + \frac{R}{L}}{p_1 - p_2} V(0_-), \quad K_2 = \frac{p_2 + \frac{R}{L}}{p_2 - p_1} V(0_-)$$

↓ (詳細の計算はテキスト参照)

$$K_1 = \frac{V(0_-)}{2} (1 + \gamma) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}$$

$$K_2 = \frac{V(0_-)}{2} (1 - \gamma)$$

$$V_c = \frac{V(0_-)}{2} e^{\alpha t} \{e^{\beta t} + e^{-\beta t} + \gamma(e^{\beta t} - e^{-\beta t})\} = V(0_-) e^{\alpha t} (\cosh \beta t + \gamma \sinh \beta t)$$

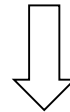
急速に減衰する波

$$\frac{R}{2} \gg \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{L}{C}} = \frac{R}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \approx \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 = \alpha + \beta &\approx -\frac{R}{2L} + \frac{R}{2L} - \frac{1}{RC} = -\frac{1}{RC} \\ p_2 = \alpha - \beta &\approx -\frac{R}{2L} - \frac{R}{2L} + \frac{1}{RC} = -\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \approx -\frac{R}{L} \end{aligned} \right\}$$

$$K_1 \approx V(0_-), \quad K_2 \approx 0$$



$$V_c \approx K_1 e^{p_1 t} = V(0_-) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

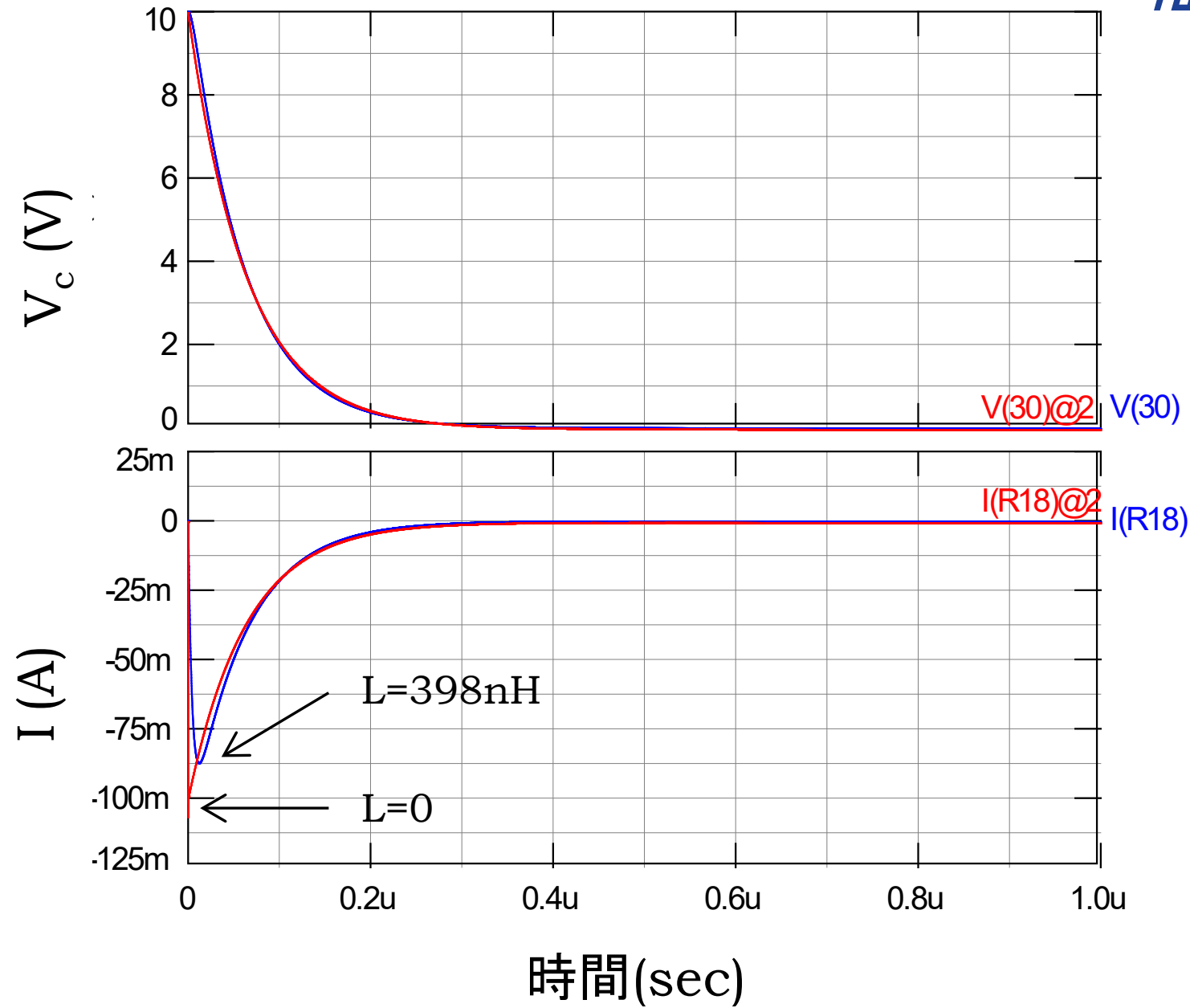
$$I = C \frac{dV_c}{dt} \approx -\frac{CV(0_-)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{V(0_-)}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

抵抗が高いと、RC回路と同じ振る舞いを示す

RLC直列回路の自然応答：2つの実根の場合(3)

7

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



RLC直列回路の自然応答：2つの複素根の場合(1)

8

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$\frac{R}{2} < \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\alpha = -\frac{R}{2L}, \quad \beta \rightarrow j\beta'$$

$$\beta' = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{R}{C}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$p_1 = \alpha + j\beta'$$

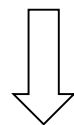
$$p_2 = \alpha - j\beta'$$

また、 $\gamma \rightarrow -j\gamma'$ $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}}$

$$K_1 = \frac{V(0_-)}{2} (1 - j\gamma')$$

$$K_2 = \frac{V(0_-)}{2} (1 + j\gamma')$$

$$V_c = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$



(詳細の計算はテキスト参照)

$$V_c = \frac{V(0_-)}{2} e^{\alpha t} \{e^{j\beta' t} + e^{-j\beta' t} - j\gamma' (e^{j\beta' t} - e^{-j\beta' t})\} = V(0_-) e^{\alpha t} (\cos \beta' t + \gamma' \sin \beta' t)$$

振動しながら減衰する波

RLC回路の自然応答：別解(2)

9

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

別解 $V(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ とすると $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ ← ダンピングファクタ

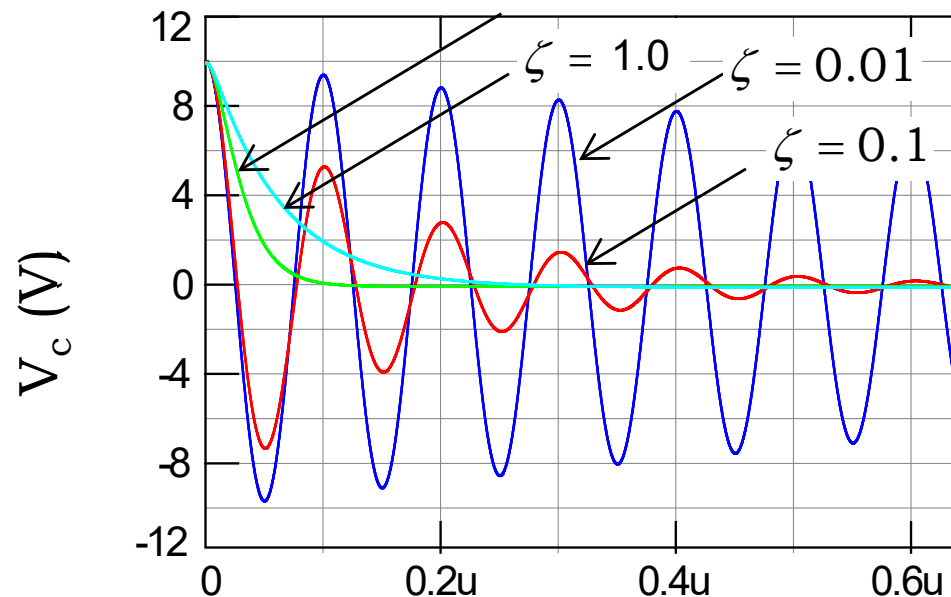
$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ← 共鳴周波数

$\alpha = -\omega_n \zeta$

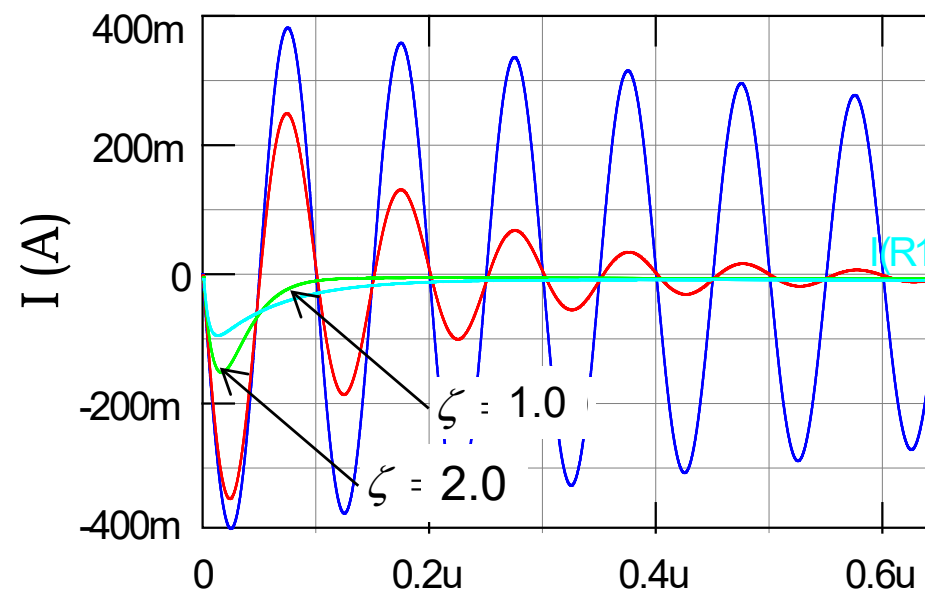
$\beta = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ $\zeta > 1$ の時：2つの実根
 $\zeta < 1$ の時：2つの複数根

ζ が小さければ小さいほど、振動が強くなる。

$\zeta = 2.0$



時間(sec)



時間(sec)

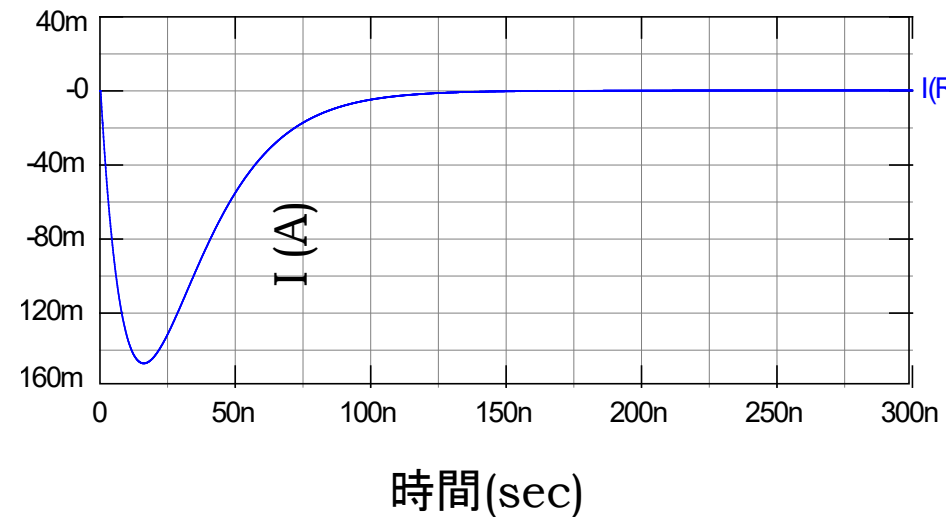
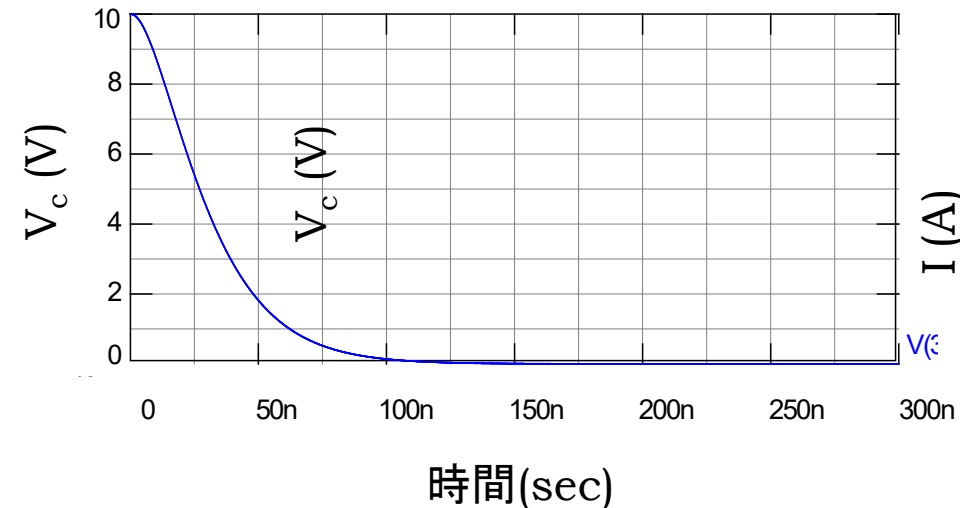
RLC直列回路の自然応答：2重根の場合(3)

10

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$\boxed{\frac{R}{2} = \sqrt{\frac{L}{C}}} \quad V_C = (K_{11} + K_{12}t)e^{pt}$$

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \frac{d}{ds} \left\{ \left(s + \frac{R}{L} \right) V(0_-) \right\} \Big|_{s=\alpha} = V(0_-) \\ K_{12} &= \left\{ \left(s + \frac{R}{L} \right) V(0_-) \right\} \Big|_{s=\alpha} = V(0_-) \frac{R}{2L} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} V_C &= V(0_-) \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{-\frac{R}{2L} t} \\ I &= C \frac{dV_C}{dt} = -CV(0_-) \left(\frac{R}{2L} \right)^2 t e^{-\frac{R}{2L} t} \end{aligned}$$

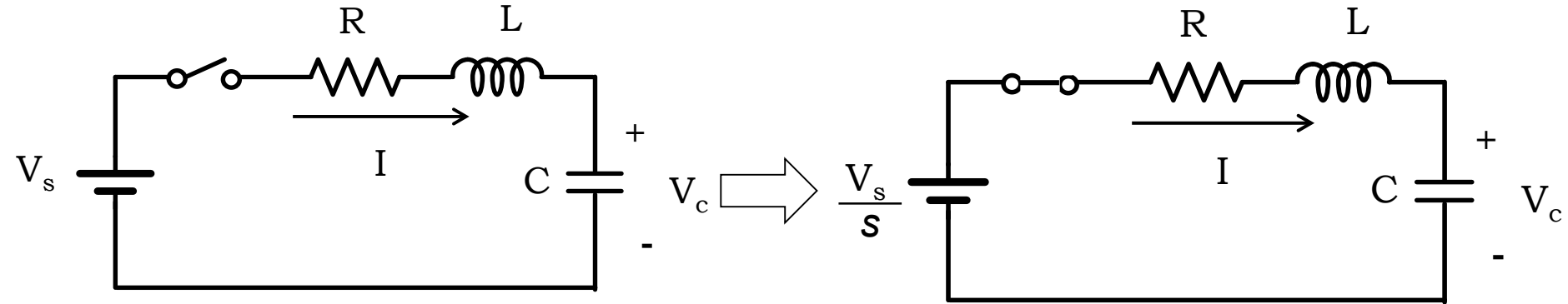


RLC直列回路のステップ応答

11

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

時刻 $t = 0$ において、スイッチを入れる。 V_c と I の時間応答を求めよ。



キルヒホッフ
の電圧則より,

$$\frac{V_s}{s} = I \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) \Rightarrow I = \frac{V_s}{L} \frac{1}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

極は自然応答回路と同じ

$$\left. \begin{aligned} I &= K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} \\ K_1 &= \frac{V_s}{L} \frac{1}{p_1 - p_2}, K_2 = -K_1 \end{aligned} \right\}$$

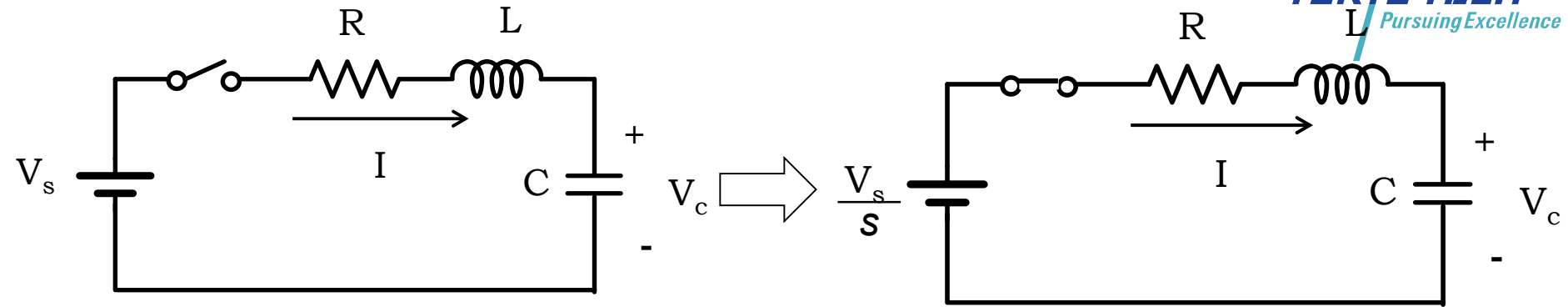
$$I = K_1 (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{V_s}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} e^{\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t})$$

(振動しながら)減衰する

RLC直列回路のステップ応答(2)

12

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



$$V_c = \frac{I}{sC} \Rightarrow V_c = \frac{V_s}{LC} \frac{1}{s \left(s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{V_s}{LC} \frac{1}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$K_0 = \frac{1}{p_1 p_2} = LC$$

$$K_1 = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)} = 2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{4L}{R^2 C} + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}$$

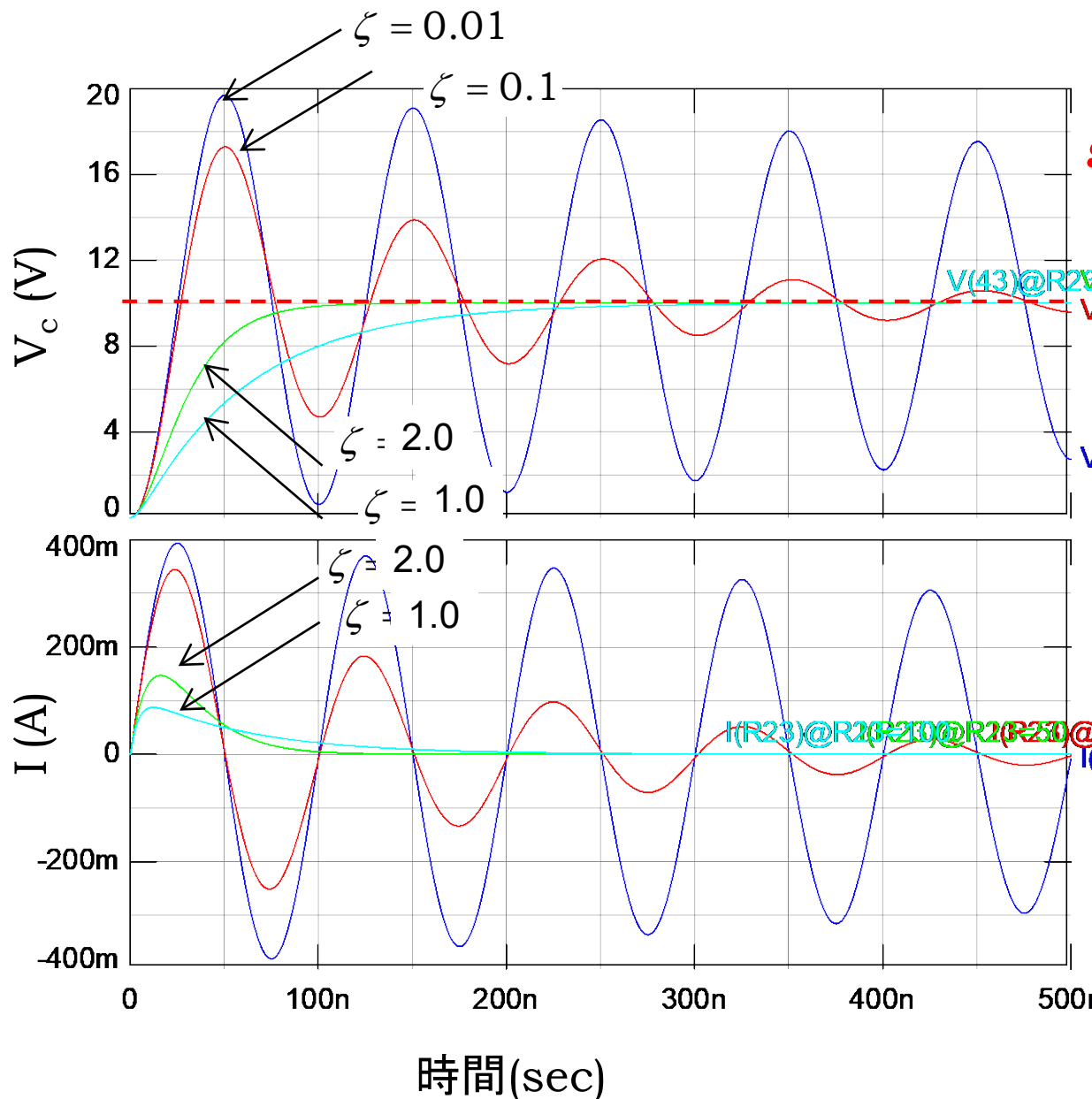
$$K_2 = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)} = 2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{4L}{R^2 C} - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}}$$

**=直流成分 V_s +
(振動しながら)減衰する成分**

RLC直列回路のステップ応答(3)

13

TOKYO TECH
Pursuing Excellence



ζ が小さければ小さいほど、振動が強くなる。

← 直流電圧成分

図に示すRLC並列回路において、はじめにスイッチS1が閉じて十分な定常状態に達した後、 $t=0$ でスイッチSを開いたのちの容量端の電圧 $V_C(t)$ を求めたい。

- (1) 初期値を考慮して $V_C(s)$ を表すラプラス表記の方程式を求めよ。
- (2) ポールを表す式を求めよ
- (3) 発生する電圧が振動的な波形になる条件を求めよ
- (4) $V_0=3V$, $R_1=0.5\Omega$, $R_2=1.5\Omega$, $L=0.8H$, $C=0.25F$ のときの $V_C(t)$ を求めよ

