

電気回路第一

第6回. ラプラス変換

東京工業大学
工学院 電気電子系
ファム ナム ハイ

1. 定義

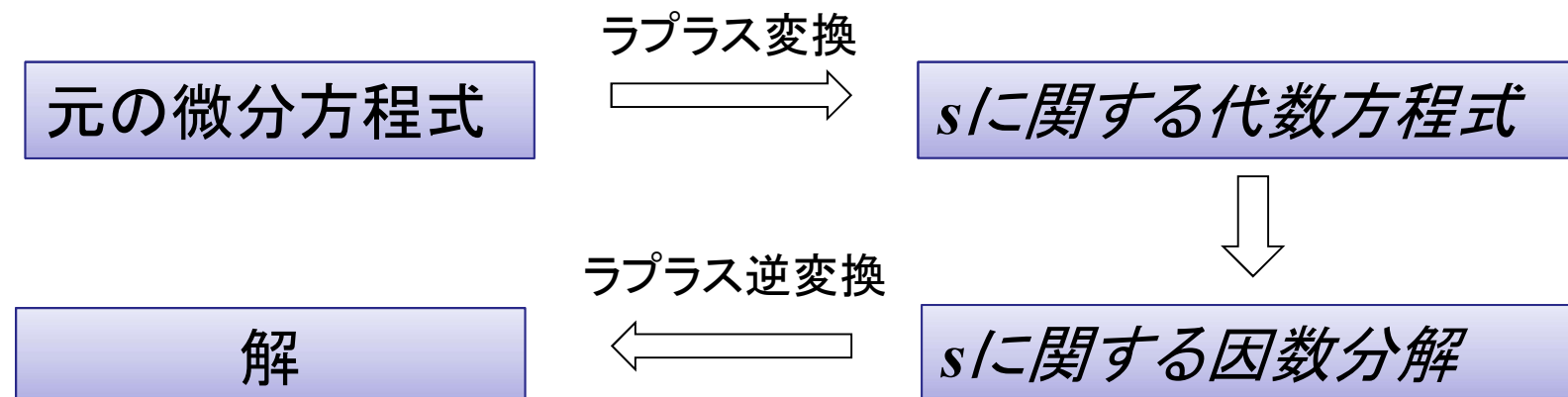
関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

別の記号: $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

2. 用途

微分方程式を代数方程式に変えて、簡単に解けるようにする



(1)単位ステップ関数

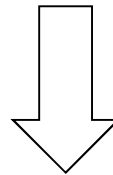
3

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$u(t) = \begin{cases} 1; t \geq 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$



$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

電気回路との関連: 時刻 $t = 0$ にスイッチを入れる

(2)単位インパルス関数

4

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; t = 0 \\ 0; t \neq 0 \end{cases}$$

性質: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

電気回路との関連: 時刻 $t = 0$ に鋭いパルス電圧を入力

(3) 指数関数

5

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$e^{at}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s-a}$$

$$e^{at} \Leftrightarrow \frac{1}{s-a}$$

電気回路との関連：容量の電圧が指数的に増大/減少

(4)正弦波・余弦波

6

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos \omega t \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \sin \omega t \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

電気回路との関連：正弦・余弦の電圧

簡単な関数のラプラス変換のまとめ

7

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

インパルス	$\delta(t)$	1
ステップ	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ	t	$\frac{1}{s^2}$
指数	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
サイン	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
コサイン	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

(5) 時間をずらした波形

8

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

元の $g(t)$ を T でずらした波形 $k(t) = g(t - T)u(t - T)$

$$K(s) = \int_0^{\infty} g(t - T)u(t - T)e^{-st} dt = \int_T^{\infty} g(t - T)u(t - T)e^{-st} dt$$

$\because u(t - T) = 0$, when $t < T$

$\tau = t - T$ で変数を変換して

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_0^{\infty} g(\tau)u(\tau)e^{-s(\tau+T)} d\tau = e^{-sT} \int_0^{\infty} g(\tau)u(\tau)e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-sT} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau = e^{-sT} F(s) \end{aligned}$$

$t \rightarrow t - T \Leftrightarrow e^{-sT}$ をかける

電気回路との関連: 遅延した信号、繰り返しの信号など

(6)微分

9

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$\frac{df(t)}{dt}$ のラプラス変換を部分積分を用いて行う

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[f(t) e^{-st} \right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{dt} (e^{-st}) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) e^{-st}) - f(0) - \int_0^{\infty} f(t) (-s e^{-st}) dt \end{aligned}$$

$$K(s) = -f(0) + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

電気回路との関連: 容量における電流と電圧の関係

(6') 2 回微分以上

10

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \Leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\frac{d^3 f(t)}{dt^3} \Leftrightarrow s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \Leftrightarrow s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

高次微分方程式を $As^n + Bs^{n-1} + Cs^{n-2} \dots$ の代数方程式に変換！

(7)積分

11

$\int_0^t f(t)dt$ のラプラス変換を部分積分を用いて行う

$$\begin{aligned} K(s) &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt \right] e^{-st} dt \\ &= -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(t)dt \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{q(0)}{s} + \frac{F(s)}{s} \end{aligned}$$

$$\text{ここで } q(0) \equiv \left[\int_0^t f(t)dt \right]_{t=0}$$

$$\int_0^t f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{q(0)}{s}$$

電気回路との関連：容量やインダクタにおける電流と電圧の関係

ラプラス逆変換

12

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

関数 $F(s)$ の逆ラプラス変換は $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$

$\delta(t)$

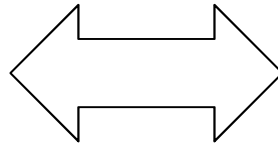
1

$u(t)$

$\frac{1}{s}$

t

$\frac{1}{s^2}$



$e^{-\alpha t}$

$\frac{1}{s + \alpha}$

$t e^{-\alpha t}$

$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$

$\sin \omega t$

$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$\cos \omega t$

$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

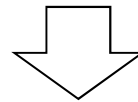
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$

$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

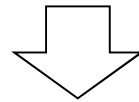
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$

$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

$$N(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}$$



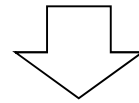
$$N(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$



$$N(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

ただし、 $K_i = [(s - p_i) \cdot N(s)]_{s=p_i}$

$$N(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$



$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}, \quad t \geq 0$$

微分方程式が系統的に解ける

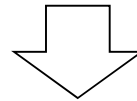
複数根がある場合

15

$$N(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{(s - p_1)^2} + \cdots + \frac{K_r}{(s - p_1)^r} + \frac{K_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

ただし、 $K_r = \left[(s - p_1)^r N(s) \right]_{s=p_1}$

$$K_{r-i} = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i}{ds^i} \left\{ (s - p_1)^r N(s) \right\} \right]_{s=p_1}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1$$



$$f(t) = \left\{ K_1 + K_2 \frac{t}{1!} + \cdots + K_r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \right\} e^{p_1 t} + K_{r+1} e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}$$

例題

16

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$$F(s) = \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \text{ のラプラス逆変換}$$

ステップ1: $F(s) = \frac{K_{11}}{s-1} + \frac{K_{12}}{(s-1)^2} + \frac{K_3}{(s+2)}$

$$K_{12} = (s-1)^2 \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \Big|_{s=1} = \frac{11}{3}$$

$$K_{11} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s-1)^2 \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \right\} \Big|_{s=1} = \frac{25}{9}$$

$$K_2 = (s+2) \frac{5s^2 + 2s + 4}{(s-1)^2(s+2)} \Big|_{s=-2} = \frac{20}{9}$$

ステップ2: $\therefore f(t) = \frac{25}{9}e^t + \frac{11}{3}te^t + \frac{20}{9}e^{-2t}$

第 7 回の宿題

17

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

問題1

ラプラス変換を用いて、次の微分方程式の解を求めよ。

(1) $\frac{dy}{dt} + y = e^{-2t}$, 初期条は $y(0) = 0$ とする。

(2) $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = e^{-3t}$, 初期条は $y(0) = 0, y'(0) = 0$ とする。

問題2

ラプラス逆変換を行い、時間応答を求めよ。

(1) $Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$

(2) $Y(s) = \frac{s}{(s + 2)(s^2 + 1)}$