

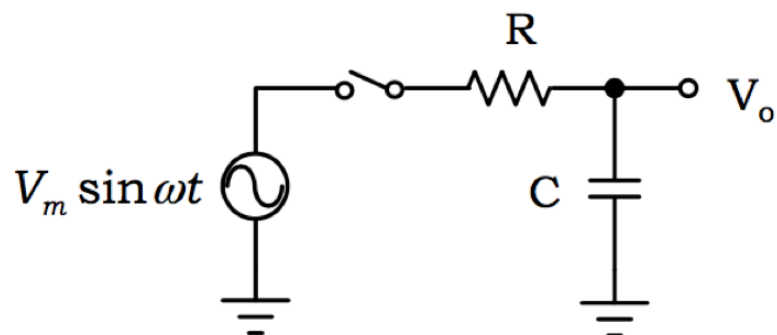
交流回路

－ 正弦波と複素表現 －

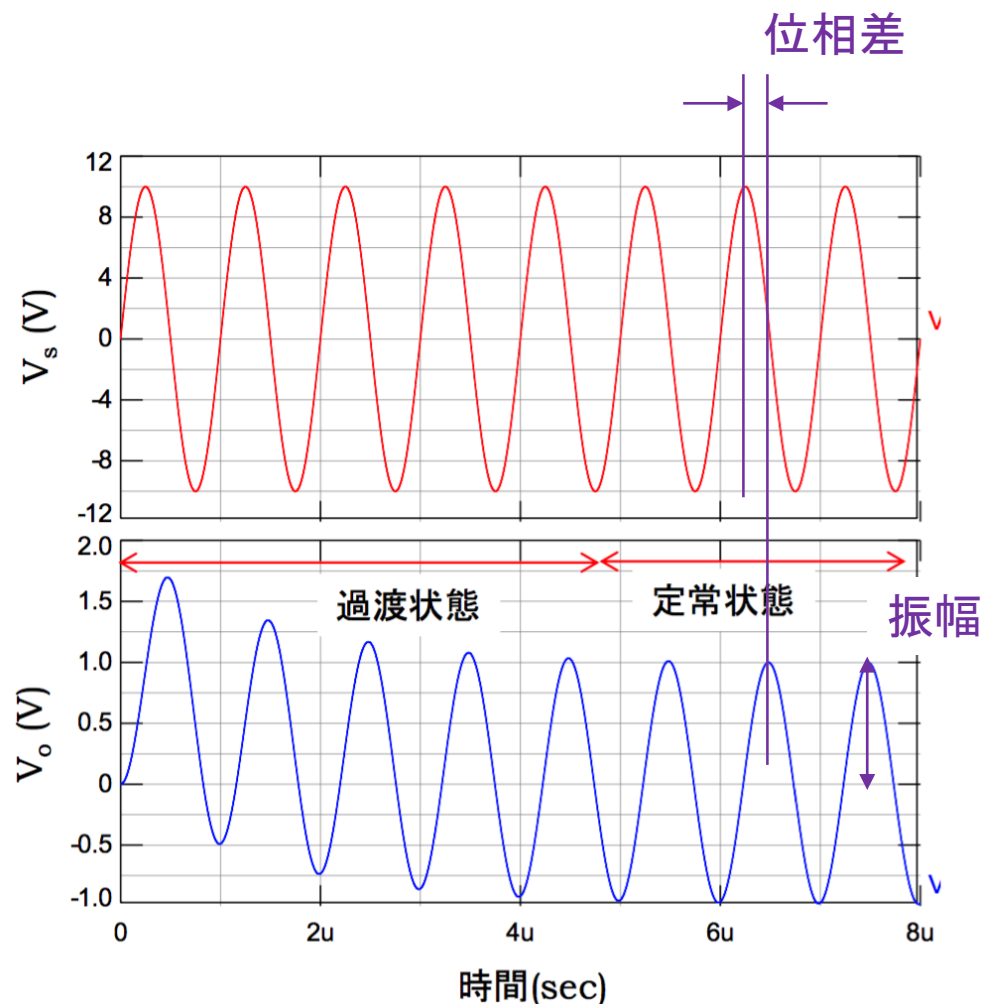
内容

- 正弦波
 - 角周波数, 初期位相(位相), 振幅
- 正弦波の応答
 - RC回路の正弦波応答(ラプラス変換)
- 複素数表示とフェーザ
 - RC回路の正弦波応答(複素表示)
- s 領域表示と周波数特性

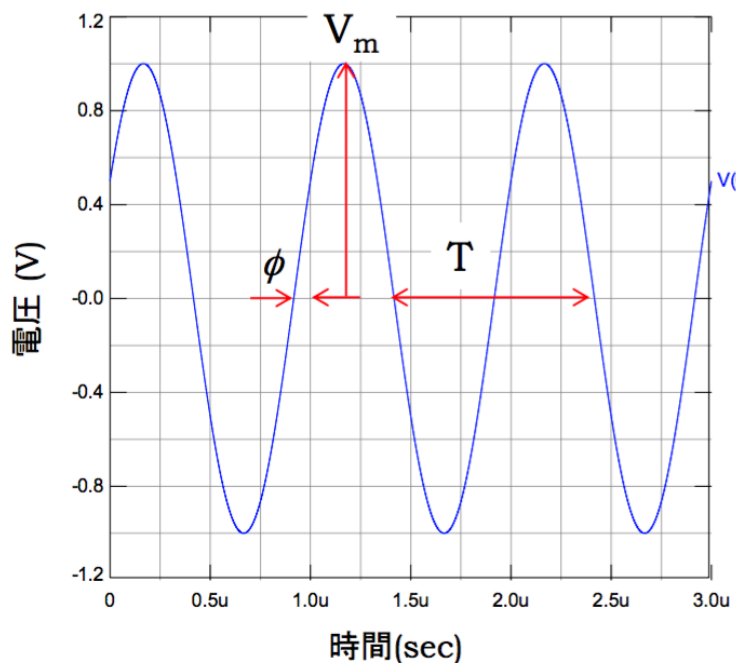
定常時の応答を求めたい



- RC回路のスイッチを入れた後の応答
 - 正弦波は, 同じ周期(周波数)の正弦波。
 - 大きさ(振幅)が異なる。
 - 位相が異なる。
- 応答(振幅, 位相)を簡単に求めたい。



正弦波 (V_m, ω, ϕ の3パラメータで決定)



- 正弦波

$$V = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

- 角周波数 ω

$$f = \frac{1}{T}, \omega = 2\pi f$$

f : 周波数 (Hz), T : 周期 (s), ω : 角周波数 (rad/s)

- 初期位相 ϕ

- 時刻 $t=0$ における位相。単位はラジアン

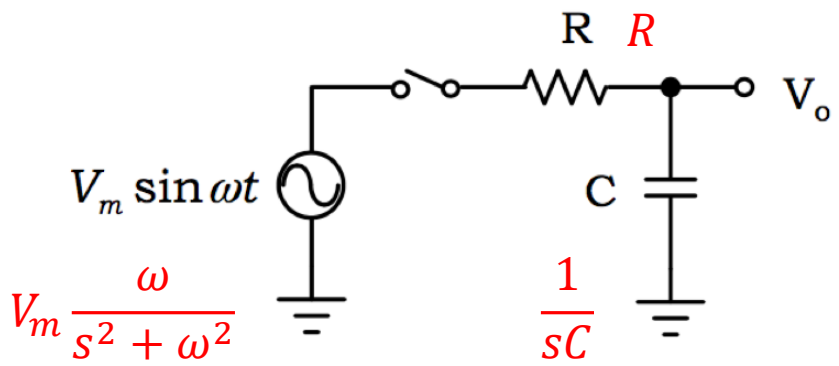
- 振幅 V_m

- 正弦波信号の最大値

- 振幅は、実効値 (V_{rms}, V_e) を使っても表される。*rms: root mean square (2乗平均平方根)
 - 電力で詳しく説明

$$V_{rms} = V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt} = \sqrt{\frac{V_m^2}{2}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

RC回路の応答(ラプラス変換) I



$$\begin{aligned}
 V_o(s) &= V_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_m \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{1 + sCR} \\
 &= \frac{V_m}{RC} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \\
 &= \frac{V_m \omega}{\tau} \frac{1}{s - j\omega} \frac{1}{s + j\omega} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}
 \end{aligned}$$

$$V_o = \frac{V_m \omega}{\tau} \left\{ K_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + K_2 e^{j\omega t} + K_3 e^{-j\omega t} \right\} \quad (7.7)$$

例えば

$$K_1 = \frac{1}{-\frac{1}{\tau} - j\omega} \frac{1}{-\frac{1}{\tau} + j\omega} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\tau}\right)^2 - (j\omega)^2}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} \\
 K_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 - j\frac{\omega}{\tau}} \\
 K_3 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}}
 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

RC回路の応答(ラプラス変換) II

$$V_o = \frac{V_m \omega}{\tau} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + \omega^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 - j\frac{\omega}{\tau}} e^{j\omega t} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 + j\frac{\omega}{\tau}} e^{-j\omega t} \right\} \quad (7.9)$$

第1項は,

$$V_o = V_m \frac{\omega \tau}{1 + (\omega \tau)^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7.10) \quad \text{減衰項(時間と共に減少する)}$$

第2, 3項は,

$$V_m \left\{ -\frac{\omega \tau}{(\omega \tau)^2 + 1} \cos \omega t + \frac{1}{(\omega \tau)^2 + 1} \sin \omega t \right\} = V_m \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad \phi = \tan^{-1}(-\omega \tau)$$

$$\text{注)} \left(\begin{array}{l} \sin(\omega t + \phi) = \sin(\phi) \cos(\omega t) + \cos(\phi) \sin(\omega t) \\ \frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \left\{ \frac{-\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \sin(\omega t) \right\} \\ \sin(\phi) = \frac{-\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}, \cos(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}, \sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1 \end{array} \right)$$

RC回路の応答(ラプラス変換) III

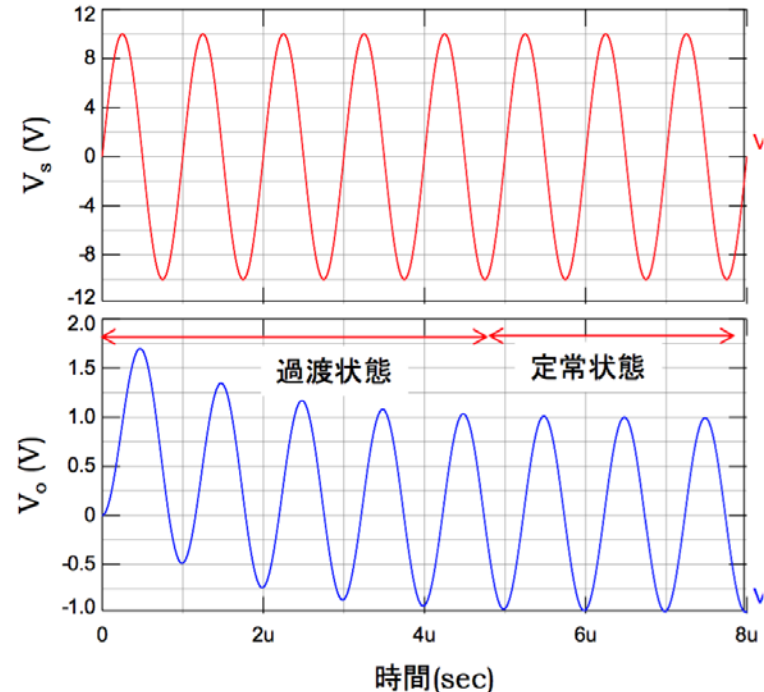
- 十分時間が経つと, 第1項は0となる。
- 従って定常状態の解は, 入力電圧と同じ角周波数を持つ正弦波となる。
- 定常状態の解を求める。
 - 正弦波の3パラメータのうち, 振幅と位相を求めることに帰着する。

$$V_o = \frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad (7.14)$$

$V_m = 10\text{V}, f = 1\text{MHz}, R = 10\text{k}\Omega, C = 160\text{pF}$
の時の解。



ラプラス変換は, 牛刀?



複素数表示とフェーザ表示

$$V = V_m \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j(\omega t + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$\operatorname{Re}\{e^{j\omega t}\}$ は、正弦波を表すので、回路の定常応答の重要な情報は、

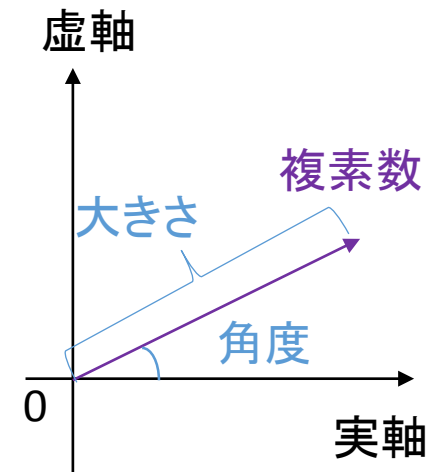
$$V = V_m e^{j\phi}$$

によって示される、振幅と位相である。これを、もっと簡潔に

$$V = V_m \angle \phi$$

に表して、フェーザ表示と呼んでいる。

注) 複素数は、複素平面のベクトルとして記述できる。従って複素数は、ベクトルの大きさと実軸からの角度によって表記できる。これを波の振幅と位相に対応させている。



演習問題

問題 1

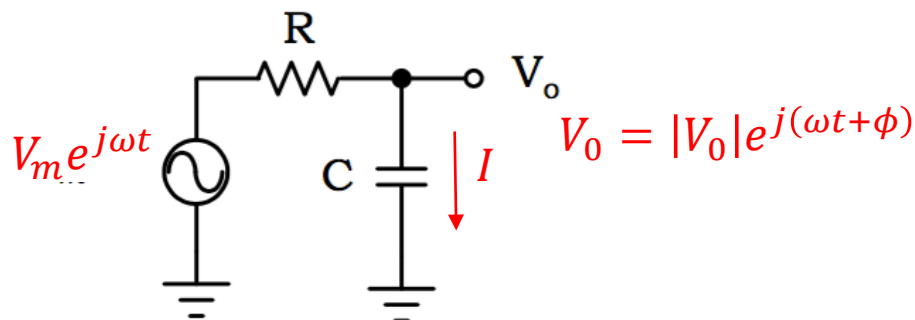
(1) 次の複素数について、フェーザ表示に改めよ。ただし、位相の単位にはラジアンを用いること。

$$\text{a) } 1+j \quad \text{b) } \frac{4}{1+j\sqrt{3}} \quad \text{c) } \frac{3}{j}$$

(2) 次のフェーザ表示された複素数を、複素数表示に改めよ。

$$\text{a) } 4\angle -\frac{\pi}{3} \quad \text{b) } \sqrt{2}\angle -\frac{3\pi}{4} \quad \text{c) } 3\angle \pi$$

RC回路の応答(複素表示) I



$$I = C \frac{dV_o}{dt} = j\omega C |V_o| e^{j(\omega t + \phi)} \quad (7.21)$$

$$V_m e^{j\omega t} = RI + V_o = j\omega CR |V_o| e^{j(\omega t + \phi)} + |V_o| e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$V_m = j\omega CR |V_o| e^{j\phi} + |V_o| e^{j\phi}$$

$$|V_o| e^{j\phi} = \frac{V_m}{1 + j\omega CR} = \frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{j\phi}, \phi = -\theta, \theta = \tan^{-1}(\omega\tau)$$

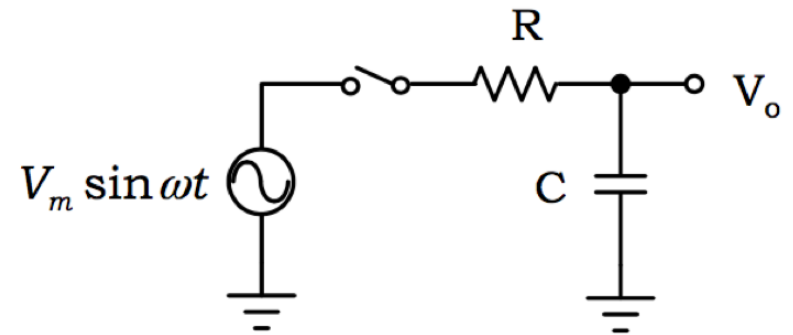
注) $1 + j\omega CR = \sqrt{1 + (\omega CR)^2} e^{j\theta}, \theta = \tan^{-1}(\omega CR)$

振幅 $\frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$, 位相 $\phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$ のラプラス変換と同じ解が求められている。

フェーザ表示 $V_o = \frac{V_m}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle \phi, \phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$

解の吟味

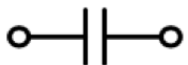
- $\omega = 0$ の時
 - 振幅 $V_0 = V_m$
 - 位相 $\phi = -\tan^{-1}(0) = 0$
- $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$ の時
 - 振幅 $V_0 = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$
 - 位相 $\phi = -\tan^{-1}(1) = -\frac{\pi}{4}$
- $\omega = \infty$ の時
 - 振幅 $V_0 = 0$
 - 位相 $\phi = -\tan^{-1}(\infty) = -\frac{\pi}{2}$



s領域表示と周波数特性

- 時間応答
 - 微分方程式
 - ラプラス変換
 - s領域表示
- 定常状態
 - 周波数領域
 - ラプラス変換の過渡項を省略すると得られる。

$s \rightarrow j\omega$, $s = \sigma + j\omega$ において $\sigma = 0$ とおいた。


$$Z_c = \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y_c = sC = j\omega C$$

(a) 容量



$$Z_L = sL = j\omega L$$

$$Y_L = \frac{1}{sL} = \frac{1}{j\omega L}$$

(b) インダクタ

それぞれの素子の周波数領域における特性

注) 初期電荷, 初期磁束は十分時間が経過し定常状態に達すると定常応答に影響を与えない。

伝達関数 I

s領域で求めて、 $s \rightarrow j\omega$ で変換する。

$$H(s) = H \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \quad (7.28)$$

$s \rightarrow j\omega$ 変換を行うと

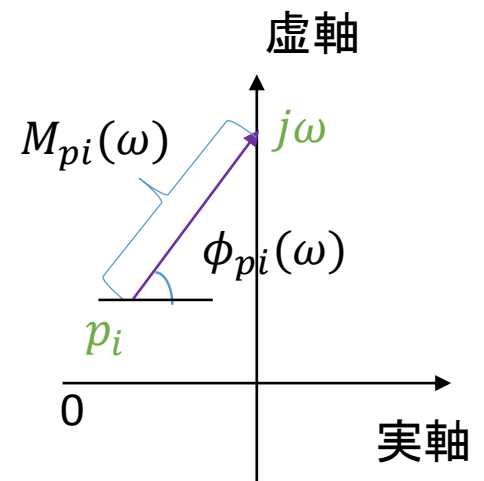
$$H(\omega) = H \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \cdots (j\omega - z_m)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_n)} \quad (7.29)$$

が得られ。伝達関数の周波数応答 $H(\omega)$ が求められる。

例えば、 $j\omega - p_i$ は、図のベクトルになるので、大きさを $M_{pi}(\omega)$ 、位相角を $\phi_{pi}(\omega)$ とすると、

$$j\omega - p_i = M_{pi}(\omega)e^{j\phi_{pi}(\omega)}$$

と表される。



伝達関数 II

- 伝達関数
 - 大きさ
 - 各ゼロからの大きさを掛けて、各ポールからの大きさを割る
 - 位相
 - 各ゼロからの位相を足して、各ポールからの位相を引く

$$H(\omega) = H \frac{M_{z1} \cdot M_{z2} \cdots M_{zm}}{M_{p1} \cdot M_{p2} \cdots M_{pn}} e^{j(\phi_{z1} + \phi_{z2} + \cdots + \phi_{zm} - \phi_{p1} - \phi_{p2} - \cdots - \phi_{pn})} \quad (7.31)$$

- 周波数応答
 - 伝達関数を角周波数において計算すれば良い。

RC回路の伝達関数 I

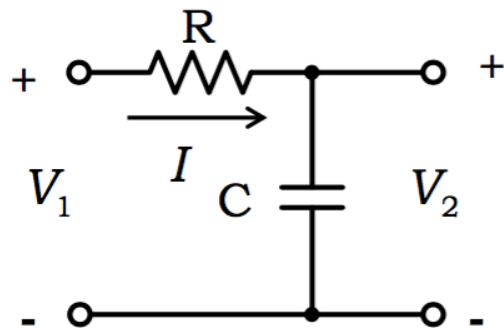


図 7.6 RC 積分回路

$$\frac{V_2}{V_1} = H(s) = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (7.32)$$

$$\left. \begin{aligned} M_p(\omega) &= \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \\ \phi_p(\omega) &= \tan^{-1}(\omega RC) \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

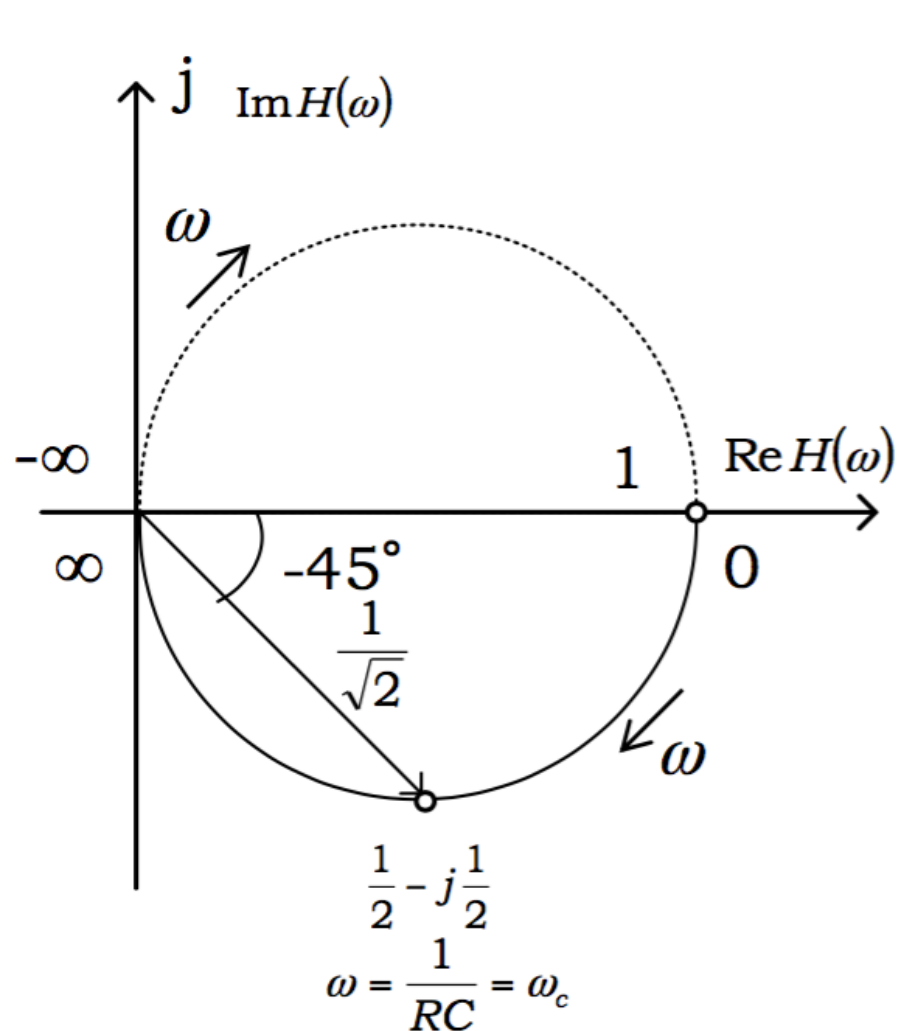
$$H(\omega) = \frac{1}{RC} \frac{1}{M_p(\omega) e^{(-j\phi(\omega))}} \quad (7.35)$$

(7.32)式を元に, $H(\omega)$ を複素平面上に図示する。

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} = \frac{1 - j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} - j \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (7.38)$$

$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ であり, コーナ一周波数と呼ばれている。

RC回路の伝達関数 II



$$\text{Re } H(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}, \quad \text{Im } H(\omega) = -\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (7.39)$$

$$\left(\text{Re } H(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + (\text{Im } H(\omega))^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (7.40)$$

先ほどの解の吟味と同じことが確認できる。