電気回路第一

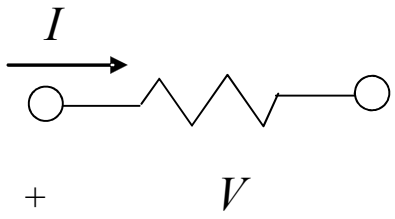
第7回. ラプラス変換の応用
過度応答ー次の系

東京工業大学
工学院　電気電子系
ファム　ナム　ハイ

抵抗器

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

抵抗



$$V(t) = RI(t)$$

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = GV(t)$$

⇩

$$V(s) = RI(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{R} = GV(s)$$

容量

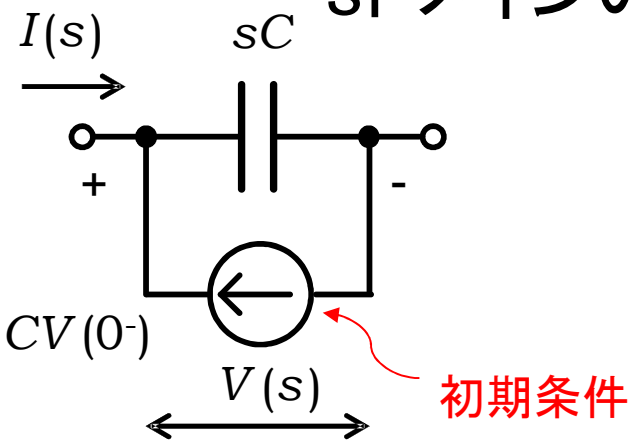
$$I_c(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

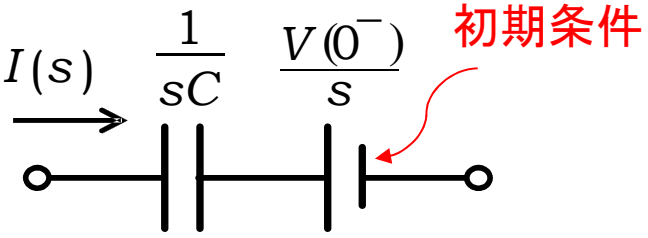
$$I_c(s) = C\left[sV_c(s) - V_c(0^-)\right] = sCV_c(s) - CV_c(0^-)$$

あるいは $$V_c(s) = \frac{I_c(s)}{sC} + \frac{V(0^-)}{s}$$

sドメインの等価回路



$$I(s) = sCV(s) - CV(0-)$$



$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{V(0-)}{s}$$

インダクタ

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

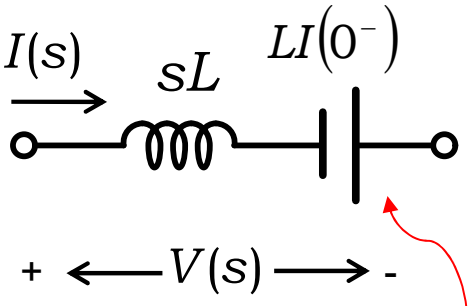
$$V_L(t) = L\frac{dI_L(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

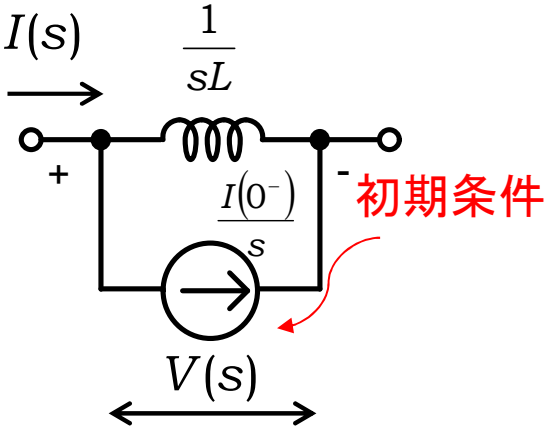
$$V_L(s) = L\left[sI_L(s) - I_L(0^-)\right] = sLI_L(s) - LI_L(0^-)$$

あるいは　$I_L(s) = \dfrac{V_L(s)}{sL} + \dfrac{I_L(0^-)}{s}$

sドメインの等価回路



$$V(s) = sLI(s) - LI(0^-)$$

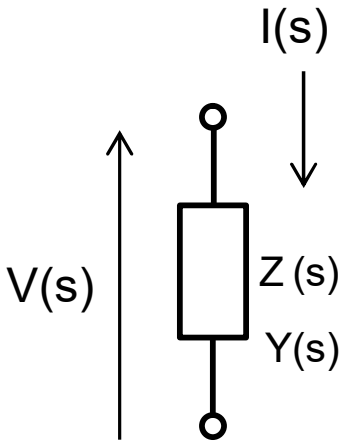


$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{I(0^-)}{s}$$

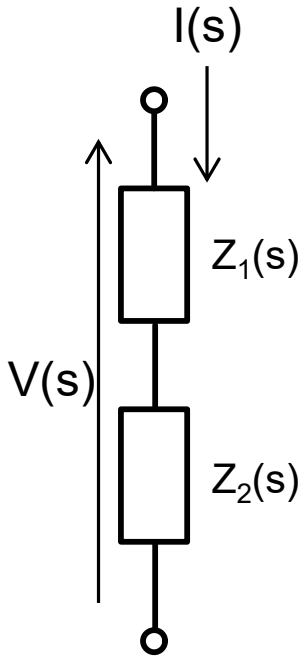
sドメインにおける回路網

TOKYO TECH Pursuing Excellence

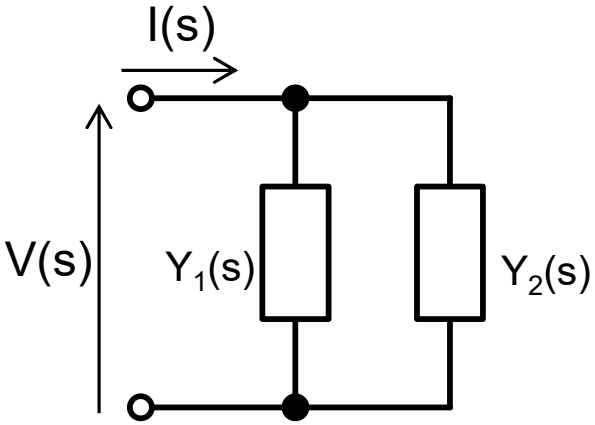
(a)単一素子



(b)直列接続素子



(c)並列接続素子



インピダンス

$$Z(s) \equiv \frac{V(s)}{I(s)}$$

$$Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

アドミッタンス

$$Y(s) \equiv \frac{I(s)}{V(s)}$$

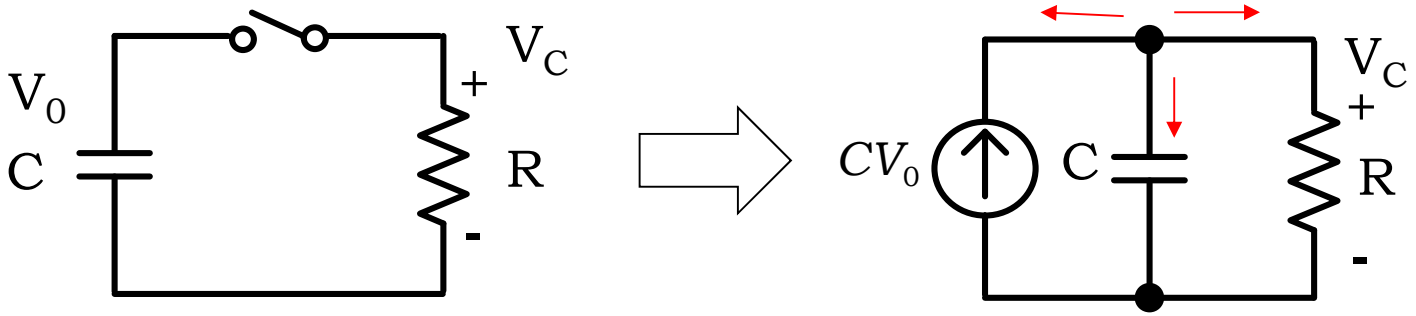
容量: $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ $\quad Y_C(s) = sC$

インダクタ: $Z_L(s) = sL$ $\quad Y_L(s) = \frac{1}{sL}$

RC回路の自然応答

TOKYO TECH Pursuing Excellence

時刻 $t = 0$ において、スイッチを入れる。V_Cの時間応答を求めよ。



キルヒホッフの電流則より,

$$V_c\left(sC+\frac{1}{R}\right)-CV_0=0$$

$$\Rightarrow V_c=\frac{CV_0}{sC+\frac{1}{R}}=\frac{V_0}{s+\frac{1}{RC}} \Rightarrow V_c=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

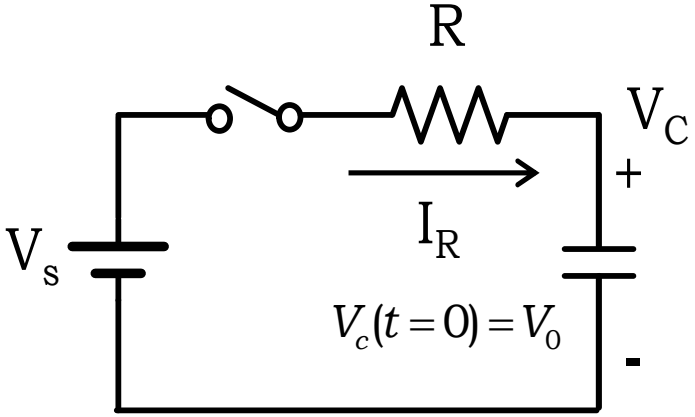
時定数

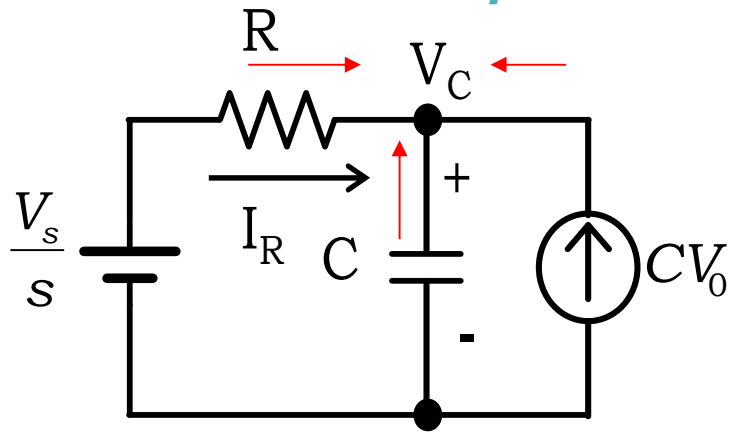
$$\tau=RC \qquad V_c=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

RC回路のステップ応答

TOKYO TECH Pursuing Excellence

時刻 $t = 0$ において、スイッチを入れる。V_Cの時間応答を求めよ。





キルヒホッフの電流則より，

$$\frac{\frac{V_s}{s}-V_c}{R}-sCV_c+CV_0=0$$

$$\Rightarrow \quad V_c=\frac{\frac{V_s}{RC}+sV_0}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} \quad \Rightarrow \quad V_c=\frac{K_0}{s}+\frac{K_1}{s+\frac{1}{RC}} \qquad K_0=V_s, K_1=V_0-V_s$$

ラプラス逆変換により

$$V_c=V_s+(V_0-V_s)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$I_R=\frac{V_s-V_c}{R}=\frac{V_s-V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

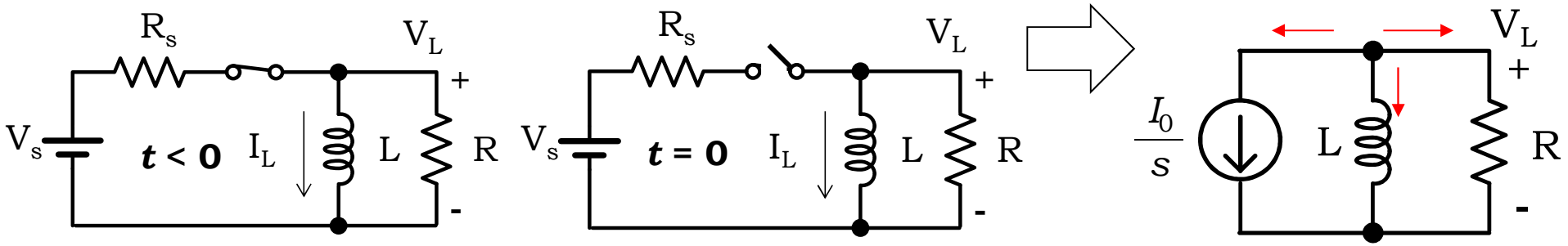
時定数

$$\tau=RC$$

RL回路の自然応答

TOKYO TECH Pursuing Excellence

$t < 0$においてスイッチが入る。Lに流れる初期電流が$I_0 = V_s / R_s$
時刻 $t = 0$ において、スイッチを切る。V_Lの時間応答を求めよ。



キルヒホッフの電流則より, $\dfrac{I_0}{s} + \dfrac{V_L}{sL} + \dfrac{V_L}{R} = 0$

$\Rightarrow \quad V_L = -\dfrac{I_0 R}{s + \dfrac{R}{L}} \quad \Rightarrow \quad V_L = -I_0 R \mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}}$

$V_L = -I_0 R \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$

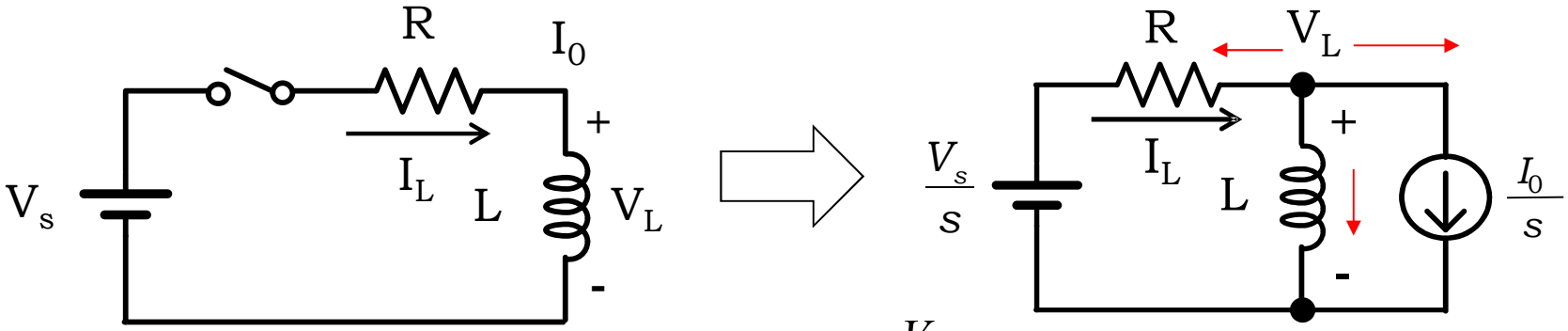
時定数
$\tau = L / R$

電流は $I_L = I_R = -\dfrac{V_L}{R} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

RL回路のステップ応答

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

$t < 0$においてLに流れる初期電流がI_0とする。
時刻$t = 0$にスイッチを入れる。V_Lの時間応答を求めよ。



キルヒホッフの電流則より,

$$\frac{V_L - \frac{V_s}{s}}{R} + \frac{V_L}{sL} + \frac{I_0}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_L = \frac{V_s - RI_0}{s + \frac{R}{L}} \quad \Rightarrow \quad V_L = (V_s - RI_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

時定数
$\tau = L/R$

電流は $I_L = \dfrac{V_s - V_L}{R} = \dfrac{V_s}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

システムの応答の一般化

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

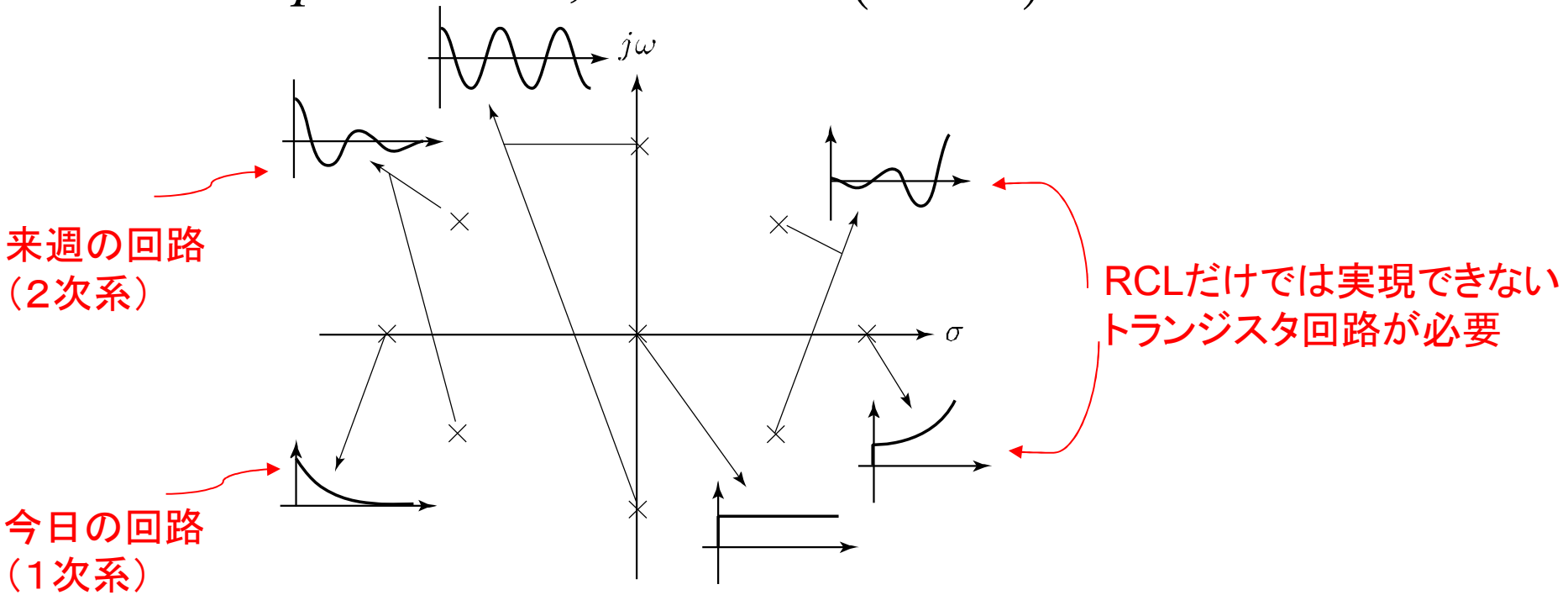
$$H(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

p_i ：極、ポール(pole)

実の単極： $p \rightarrow Ke^{pt}$

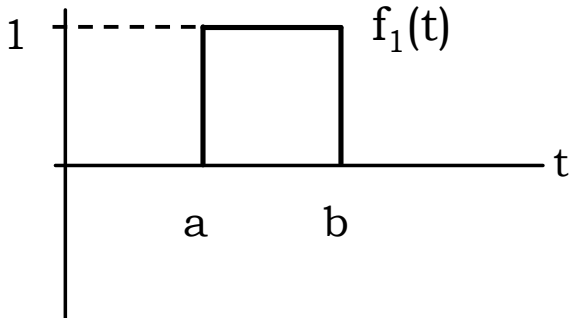
複素極： $\sigma \pm j\omega \rightarrow Ke^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$

多重極： $p \rightarrow Kt^i e^{pt},\ Kt^i e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$



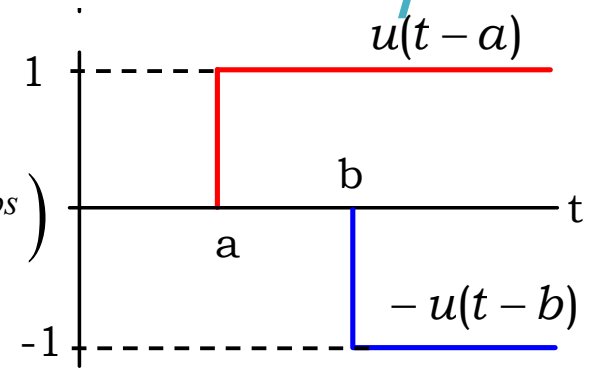
単独波形のラプラス変換

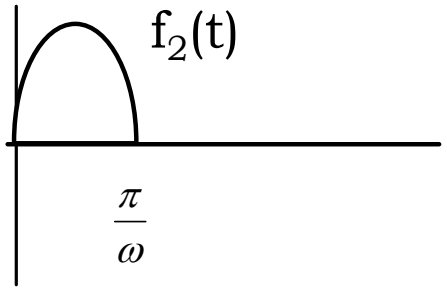
TOKYO TECH
Pursuing Excellence

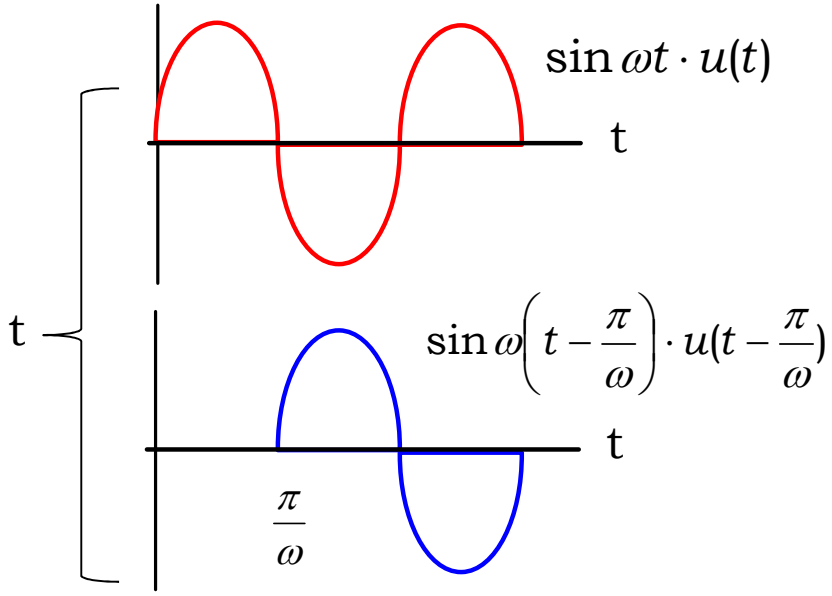


$$L\{f_1(t)\} = \int_a^b e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_a^b = \frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right)$$







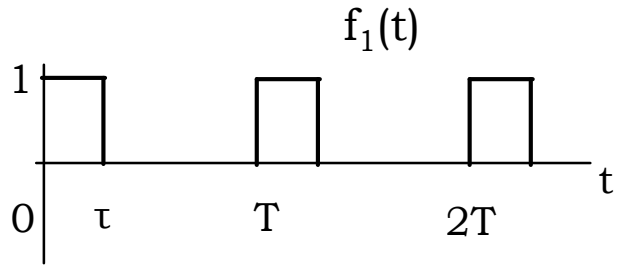
$$\Rightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$L\{f_2(t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{\omega}s}\right)$$

繰り返す波形のラプラス変換

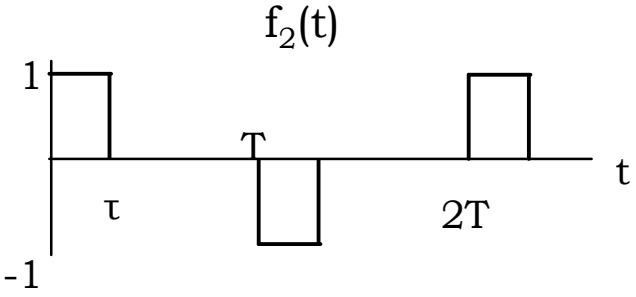
TOKYO TECH
Pursuing Excellence



$$f_1(t) = f(t) + f(t-T) + f(t-2T) + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$F_1(s) = F(s)\left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \cdots\right) = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}$$



$$f_2(t) = f(t) - f(t-T) + f(t-2T) - \cdots$$

$$\Downarrow$$

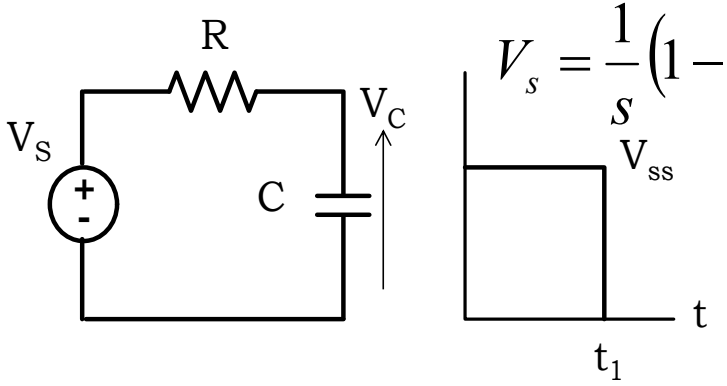
$$F_2(s) = F(s)\left(1 - e^{-Ts} + e^{-2Ts} - \cdots\right) = \frac{F(s)}{1 + e^{-Ts}}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\tau s}\right) \quad \Rightarrow \quad F_1(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{1 - e^{-Ts}}\right), \quad F_2(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1 - e^{-\tau s}}{1 + e^{-Ts}}\right)$$

方形波に対する応答

TOKYO TECH Pursuing Excellence

方形波印加によるV_Cの時間応答を求めよ。ただし、$V_C(0_) = 0$とする、



$$V_s = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-t_1 s}\right)V_{ss}$$

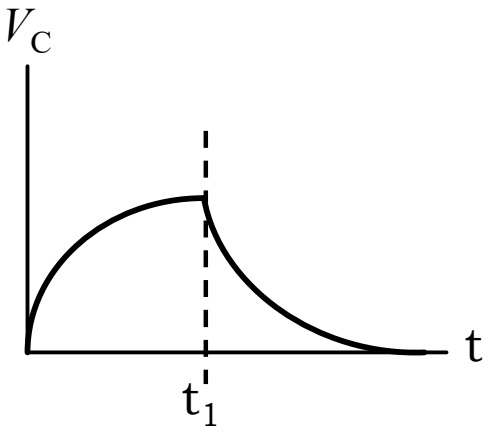
電圧の分圧から

$$V_c = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_s = \frac{1}{1 + RCs} V_s = \frac{1}{1 + \tau s} V_s = \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} V_s$$

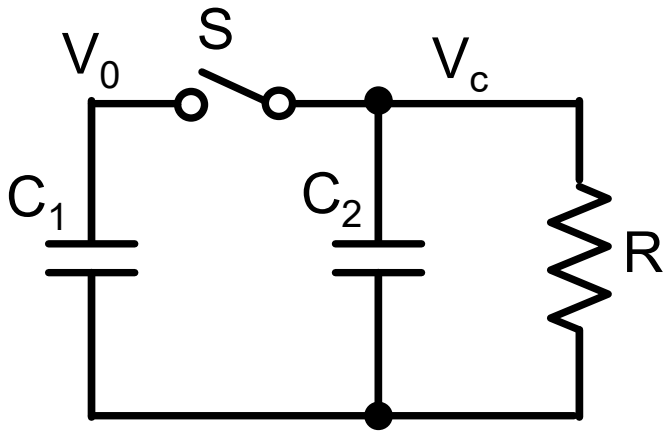
$$\Rightarrow V_c(s) = V_{ss} \frac{1}{\tau} \frac{1 - e^{-t_1 s}}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = V_{ss}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} - \frac{e^{-t_1 s}}{s} + \frac{e^{-t_1 s}}{s + \frac{1}{\tau}}\right)$$

t_1秒だけシフト

$$V_c(t) = V_{ss}\left\{\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) - \left(1 - e^{-\frac{t - t_1}{\tau}}\right)u(t - t_1)\right\}$$



宿題

TOKYO TECH
Pursuing Excellence

下の図に示す回路に$t<0$において，スイッチSが開かれ，容量C_1には電圧V_0が発生している。容量C_2には電荷が無く，電圧Vcはゼロであったとする。$t=0$においてスイッチSを閉じた時，電圧Vcの時間応答を求めよ。