電気回路第一

５．電気素子の基本応答

東京工業大学
工学院　電気電子系
ファム　ナム　ハイ

学修のポイント

- 抵抗と容量，抵抗とインダクタの時間応答
  - １階の微分方程式となり，根が負の実数なので指数関数で減少する
  - 抵抗と容量の時定数は$\tau=RC$
  - 抵抗とインダクタの時定数は$\tau=L/R$
- 容量とインダクタの時間応答
  - ２階の微分方程式となり，根が虚数となるので振動する
  - ・指数関数の肩に虚数が表れる
  - ・オイラーの公式は次のように表される
  - ・指数関数の肩が虚数になると，正弦波と余弦波が表れる

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- 電気振動
  - 電気振動は静電エネルギーW_Cと磁気エネルギーW_Lの周期的な交換
  - 振幅は全エネルギーを，位相は静電エネルギーW_Cと磁気エネルギーW_Lの比率を表す
- 抵抗と容量とインダクタの時間応答
  - ２階の微分方程式となり，根が条件により実根，複素根と変化する
  - 指数関数の肩に複素数が表れ，減衰振動する

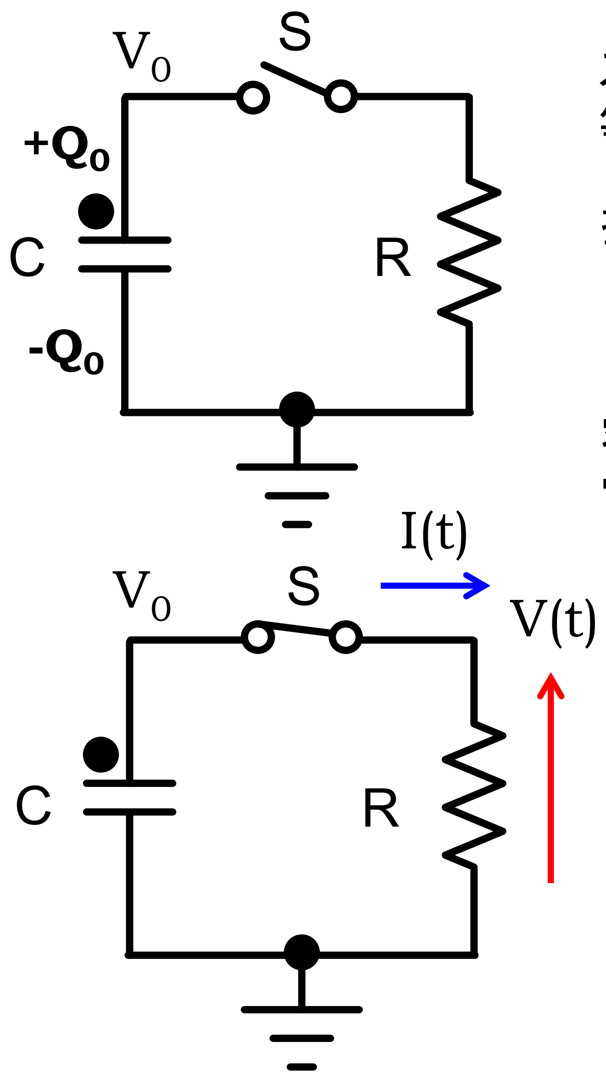
容量と抵抗およびインダクタと抵抗

の回路の応答

容量と抵抗回路の時間応答

TOKYO TECH Pursuing Excellence

電荷が溜まっている容量を抵抗で終端した場合



スイッチを閉じた瞬間，容量の電圧Voと抵抗の電圧V(t)は等しいので，

$$V(t=0)=V_0$$

抵抗の電圧V(t)は電流I(t)が流れることで生じるので，

$$I(t=0)=\frac{V_0}{R}$$

容量から電荷ΔQが抜けていく。このことによる容量側の電圧変化と抵抗側の電圧変化ΔVは等しいので

$$I=-\frac{dQ}{dt}=-C\frac{dV}{dt}$$

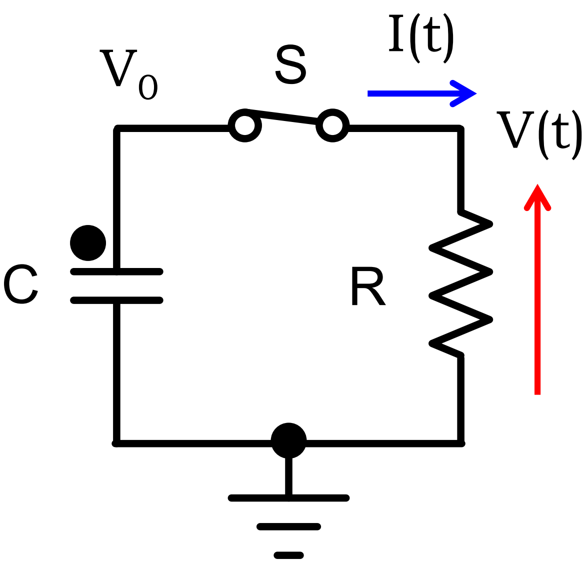
$$I=\frac{V}{R}$$

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{V}{\tau} \qquad \tau=RC$$

の微分方程式が得られる

容量と抵抗の時間応答の答え

電流と電圧は時間とともに指数的に減少する



$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V}{\tau}$$ **微分方程式**

指数関数 $e^{\lambda t}$ を仮定して解いてみる

$$V(t) = V_0 e^{\lambda t}$$ と置く

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V(t) = -\frac{V(t)}{\tau} \qquad \lambda = -\frac{1}{\tau}$$ であれば成立する

答えは

スイッチを閉じた時の容量の電圧はV_0なので,

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

電流と電圧は時間とともに
指数的に減少する

関数の微分

指数関数

$$f(t) = e^{\lambda t} \qquad \frac{df(t)}{dt} = \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(t)$$

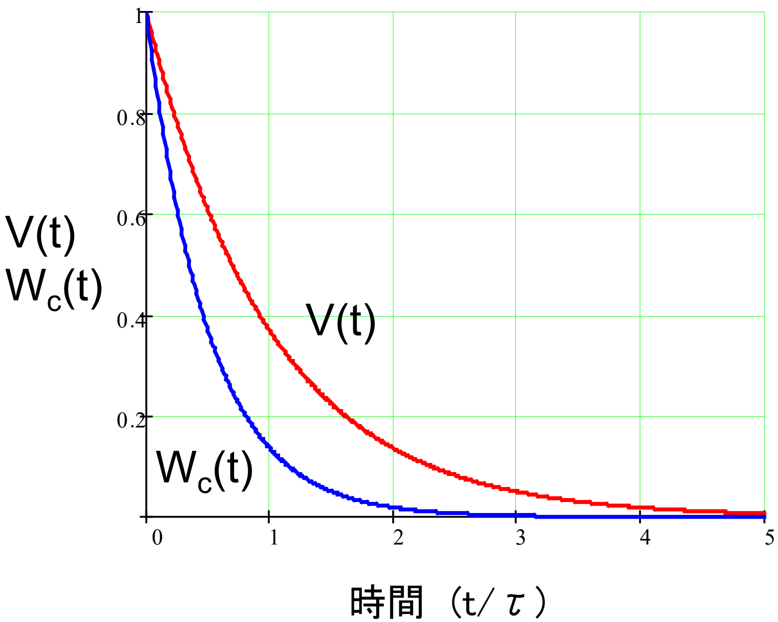
三角関数

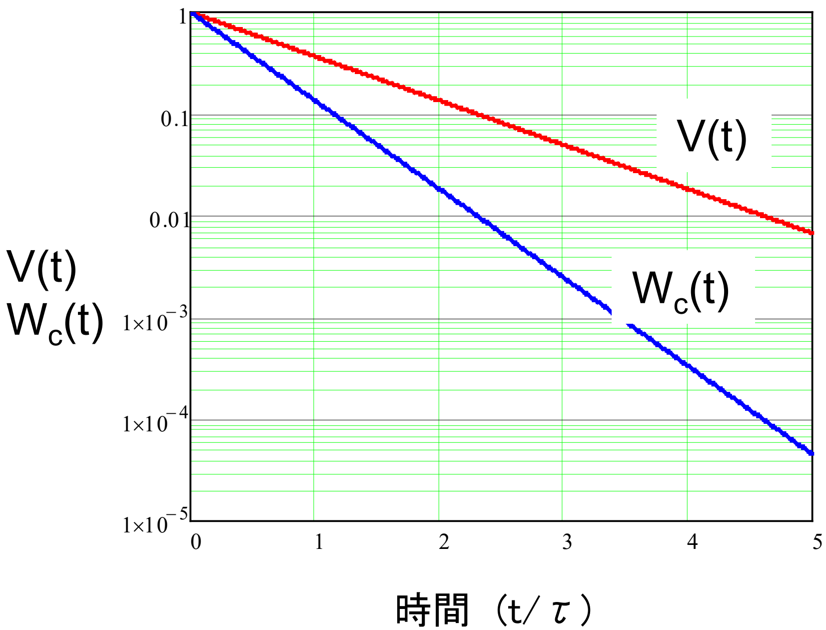
$$f(t) = \cos(\omega t) \qquad \frac{df(t)}{dt} = -\omega \sin(\omega t)$$

エネルギーの変化

エネルギーは2倍の速さで減衰する

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad W_C = \frac{1}{2}CV(t)^2 = \frac{1}{2}V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$



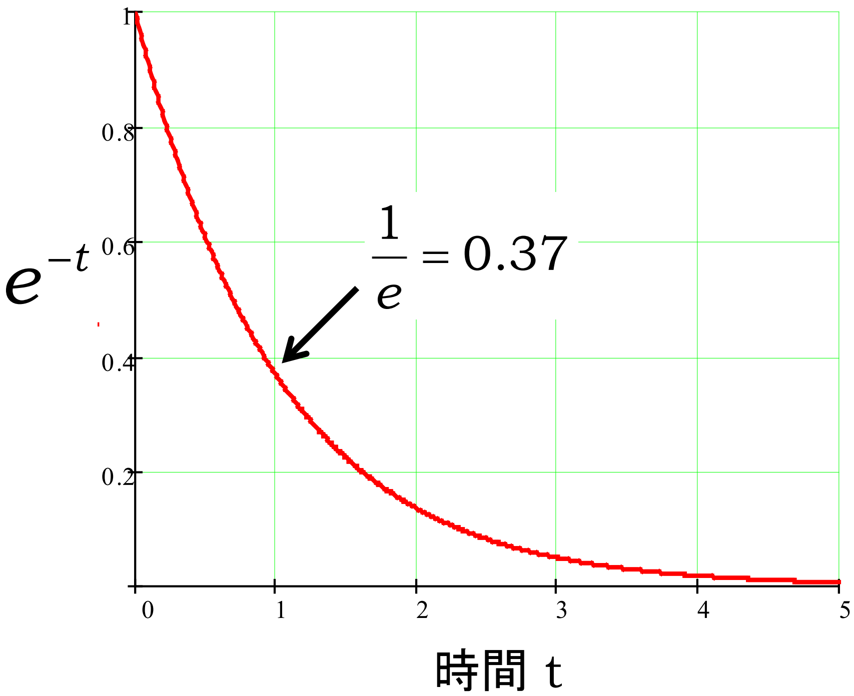


指数関数の性質

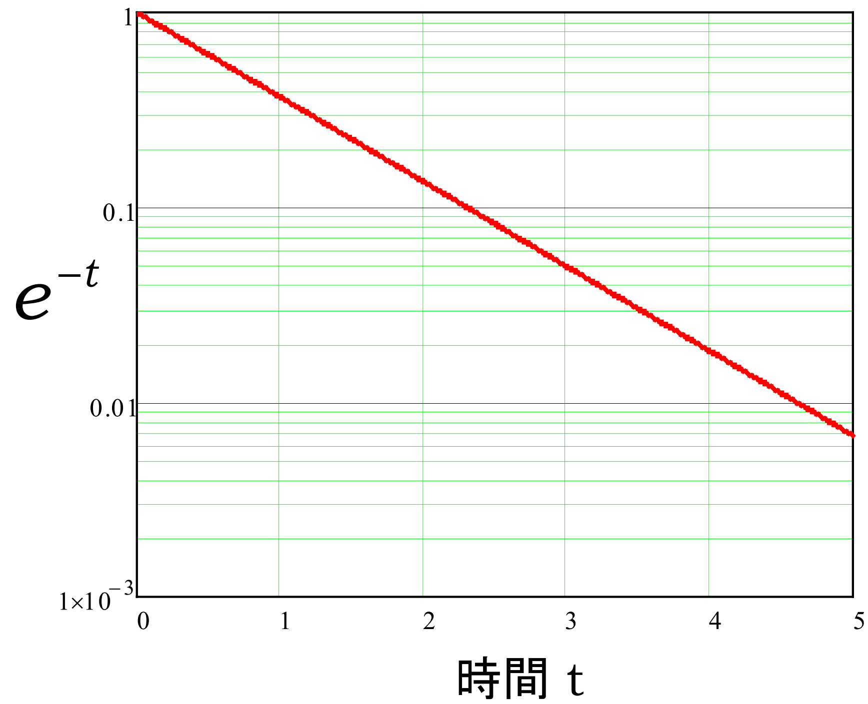
指数関数は値が一定の比率で時間とともに増減する関数である

増加率，減少率が一定である

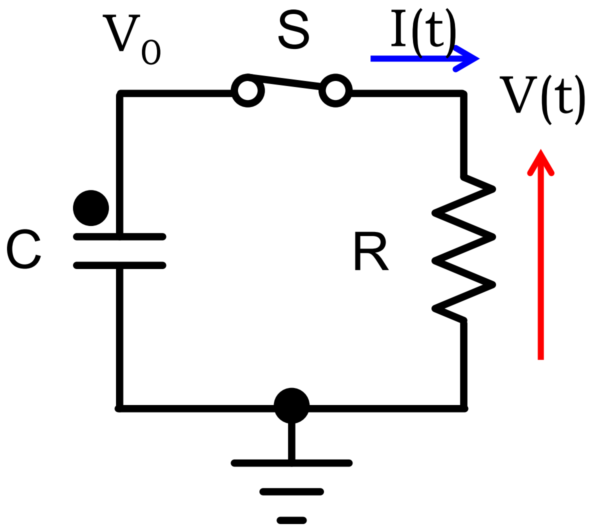
リニア表示



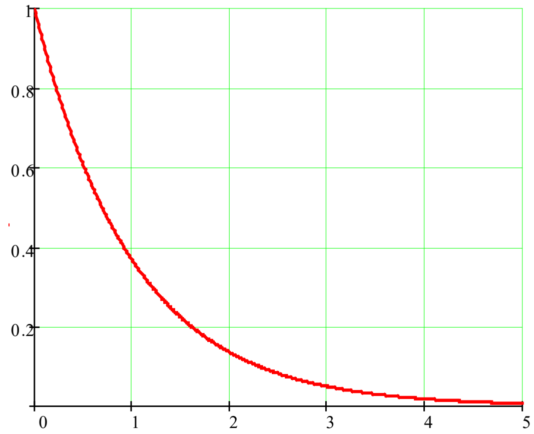
対数表示



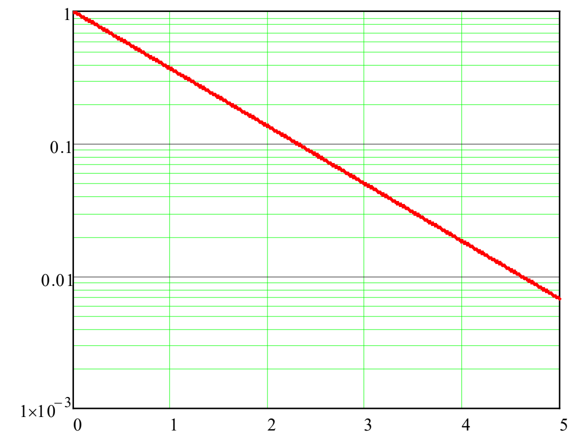
物理的な解釈



V(t)



時間 t



時間 t

抵抗を流れる電流I(t)は $I(t)=\dfrac{V}{R}$ と，抵抗の端子間電圧に比例する

容量に溜まっている電荷をQとすると $V=\dfrac{Q}{C}$ である。 この電荷は電流I(t)

が流れると，単位時間Δtにおいて $\Delta Q = I(t)\Delta T$ の電荷が減少する。

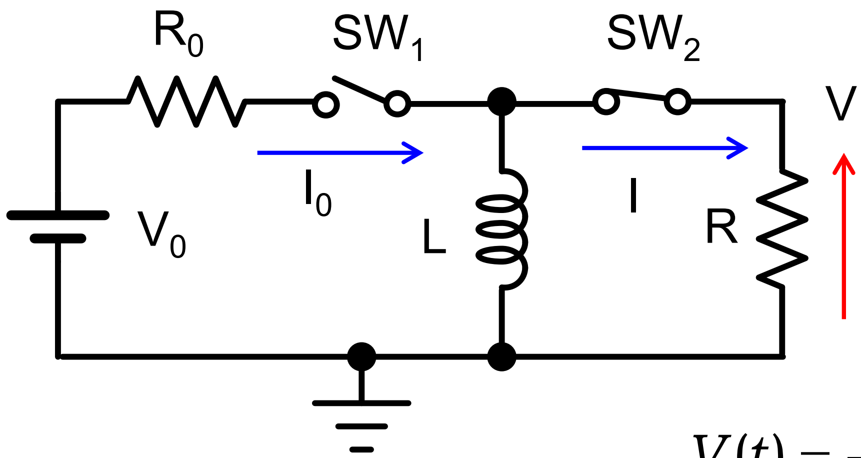
したがって電圧の変化ΔVは $\Delta V=\dfrac{\Delta Q}{C}=-\dfrac{\Delta T}{C}I(t)=-\dfrac{\Delta T}{RC}V(t)$ と電圧に比例する

電圧V(t)はだんだんと減少するので時間とともに電圧の変化ΔV(t)は減少してくる

ただし，電圧Vに対する変化ΔVの比率は $\boxed{\dfrac{1}{V}\dfrac{\Delta V}{\Delta T}=-\dfrac{1}{RC}}$ と一定になる

インダクタと抵抗の回路の時間応答

最初にスイッチSW_1が閉じられ，SW_2は開いており，インダクタLには電流I_0が流れていた。
次にSW_2を閉じてからt=0でSW_1を開くと，インダクタLと抵抗Rの電圧，電流はどうなるか



鎖交磁束不変則より　$V = -RI_0$

インダクタの電圧電流関係は，
電流の向きを考慮して

$$\left.\begin{aligned} V(t) &= -L\frac{dI(t)}{dt} \\ V(t) &= RI(t) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -L\frac{dI(t)}{dt} &= RI(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}I(t) = -\frac{I(t)}{\tau} \end{aligned}\right\}$$

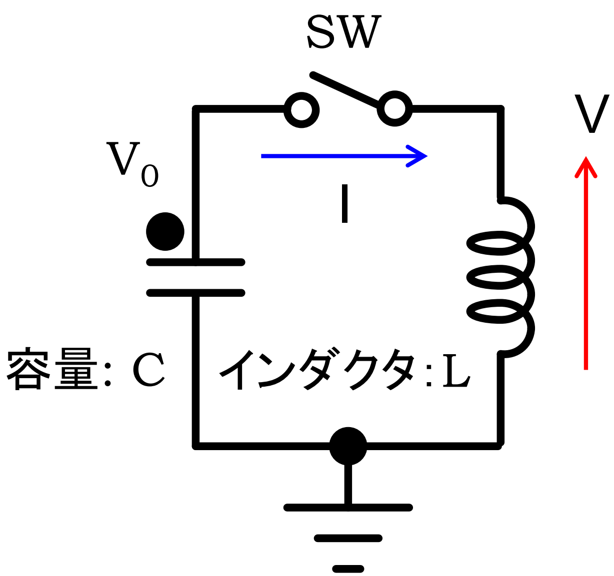
容量の場合と同様に
指数関数になる

$$\left.\begin{aligned} I(t) &= -I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V(t) &= RI = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}\right\} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

容量とインダクタの回路の応答

容量とインダクタの回路の時間応答

容量Cに初期電荷があり，その電圧をV_0とする。SWを閉じるとLC回路では



容量側の方程式

$$I(t) = -C\frac{dV(t)}{dt}$$

インダクタ側の方程式

$$I(t) = \frac{1}{L}\int V(t)dt$$

電流は等しいので

$$-C\frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{L}\int V(t)dt$$

両辺を微分し2階の微分方程式にすると

$$-\frac{d^2V(t)}{dt^2} = \frac{1}{LC}V(t)$$

２階の微分方程式の解

これまでと同様に指数関数を想定して微分方程式を解いてみる

$$-\frac{d^2V(t)}{dt^2} = \frac{1}{LC}V(t)$$

$$V(t) = A_0 e^{\lambda t}$$ と置く

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lambda A_0 e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} = \lambda^2 A_0 e^{\lambda t}$$

$$\therefore \lambda^2 A_0 e^{\lambda t} = -\frac{A_0}{LC} e^{\lambda t}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} = \frac{\pm j}{\sqrt{LC}}$$

で方程式は成立

指数の肩に
虚数が現れた！

したがって

$$V(t) = A_0\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

t=0でV_0なので

$$V(t) = V_0\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)$$

２階の微分方程式の解

$$V(t) = V_0\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)$$

$$I(t) = -C\frac{dV(t)}{dt}$$ から電流を求める

$$I(t) = -C\frac{dV(t)}{dt} = -CV_0\left(\frac{j\omega e^{j\omega t} - j\omega e^{-j\omega t}}{2}\right) = C\omega V_0\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) = \sqrt{\frac{C}{L}}V_0\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)$$

$$I(t) = \sqrt{\frac{C}{L}}V_0\left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right)$$

三角関数を用いて解いてみる

三角関数を用いて微分方程式を解いてみる

$$-\frac{d^2V(t)}{dt^2}=\frac{1}{LC}V(t)$$

$V(t)=A_0\cos(\omega' t+\phi)$ と置くと

$$\frac{dV(t)}{dt}=-\omega' A_0\sin(\omega' t+\phi),\quad \therefore \frac{d^2V(t)}{dt^2}=-\omega'^2 A_0\cos(\omega' t+\phi)$$

微分方程式より $\omega'^2 A_0\cos(\omega' t+\phi)=\frac{A_0}{LC}\cos(\omega' t+\phi)$ $\omega'=\omega=\pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$

で方程式は成立

t=0で$V(t)$=V_0なので $V(t)=V_0\cos\omega t$

$$I(t)=-C\frac{dV(t)}{dt}=-C\frac{d}{dt}(V_0\cos\omega t)=C\omega V_0\sin\omega t=\sqrt{\frac{C}{L}}V_0\sin\omega t$$

$$I(t)=\sqrt{\frac{C}{L}}V_0\sin\omega t$$

指数応答と正弦波応答の関係

指数関数に虚数を導入すると三角関数になる

指数関数から求めた答え

$$V(t) = V_0 \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right)$$

$$I(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right)$$

三角関数から求めた答え

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin \omega t$$

本来は同じ答えなので

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t$$

$$\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \sin \omega t$$

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos \omega t$$

$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j\sin \omega t$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j\sin \omega t$$

指数関数と三角関数を結びつける公式で複素数で表される

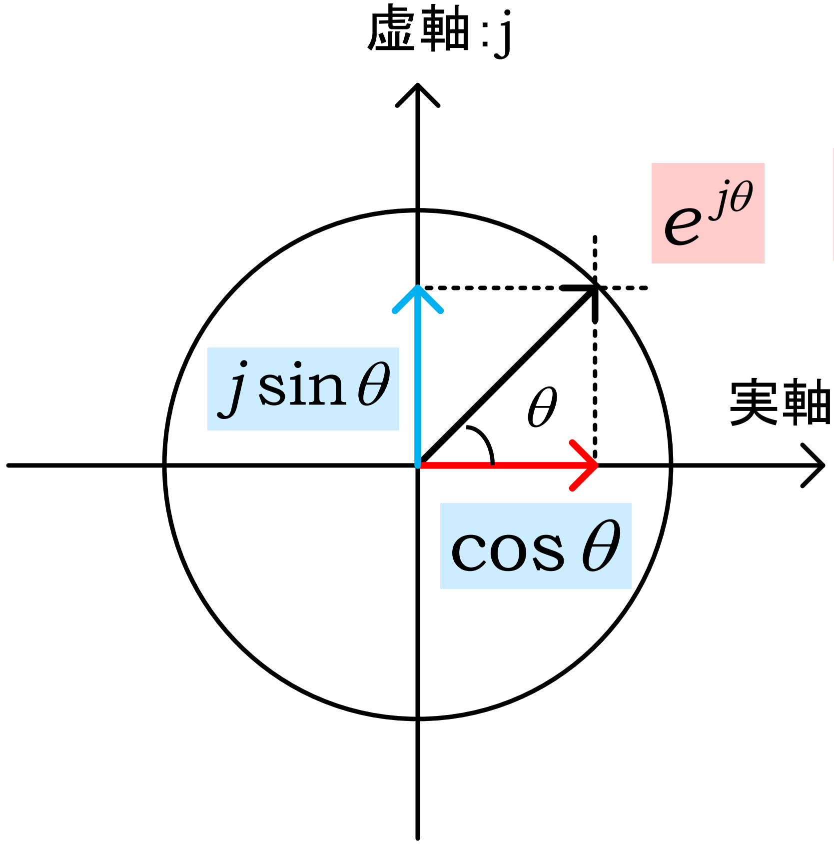
一般化すると

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j\sin \theta$$

超有名なオイラーの公式

オイラーの公式の複素平面での表現

オイラーの公式はZ平面(複素平面)上の大きさ1，で位相角θの点を表し単位円上にある。
実軸成分がcosθ，虚軸成分がjsinθである



複素数の極形式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

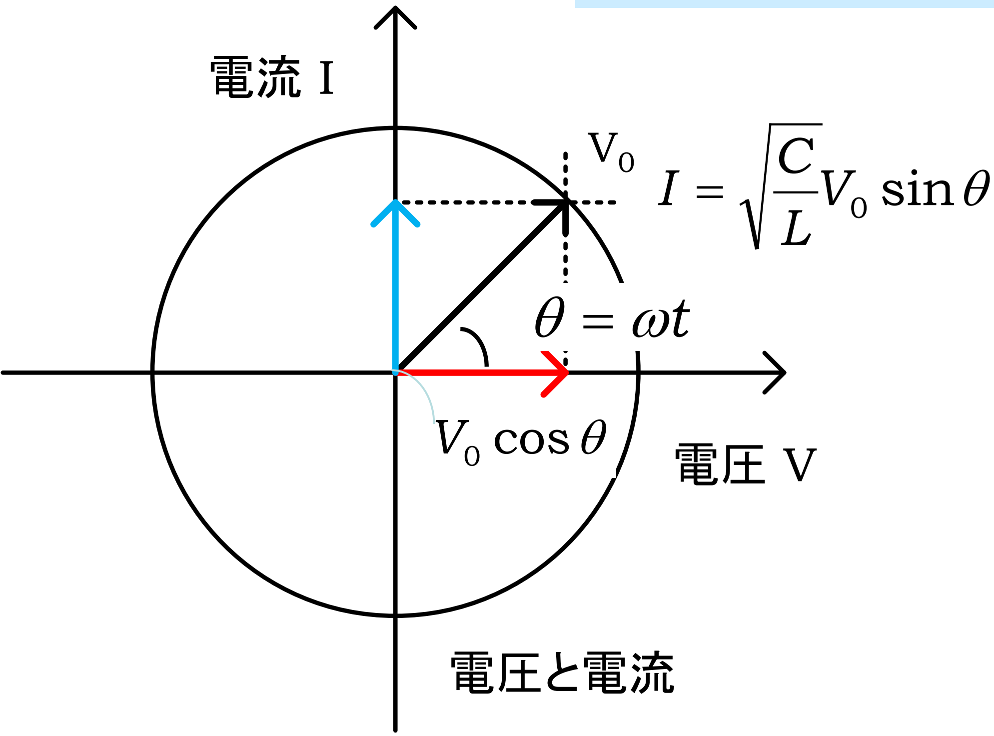
角度θを位相角という

大きさが1

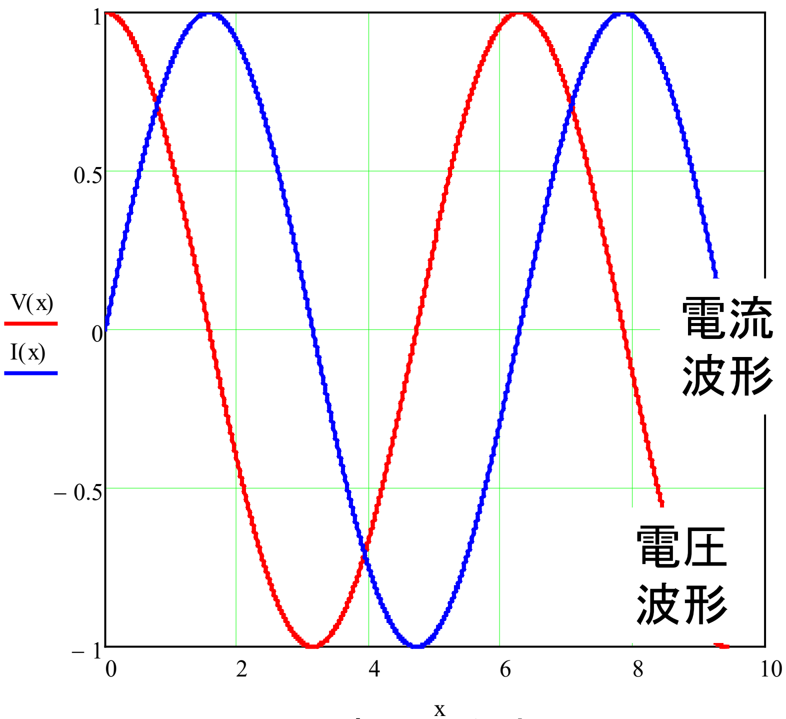
LC回路の電圧と電流

LC共振回路における電圧と電流の関係は等速円運動の水平軸への投影と垂直軸の投影と考えることができる

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$



電圧と電流



時間（位相）

静電エネルギーと磁気エネルギーの交換

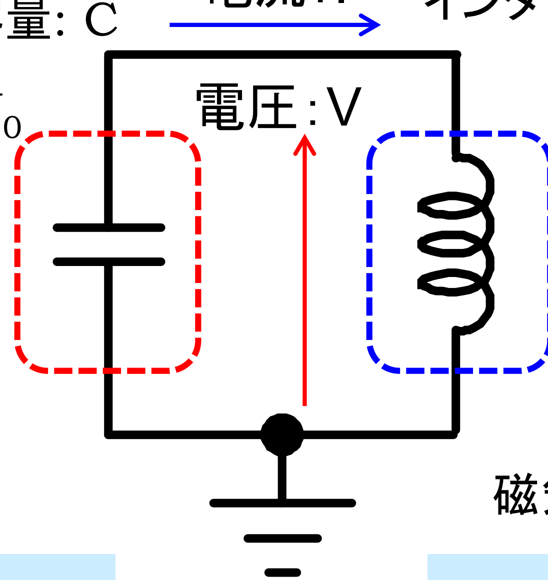
LC共振回路では静電エネルギーを磁気エネルギーに，
磁気エネルギーを静電エネルギーに，互いに交換している。これが振動である。

全エネルギーは一定

$$W_{tot} = W_C + W_L = \frac{1}{2}CV_0^2$$

$$W_c = \frac{1}{2}CV^2$$

$$W_L = \frac{1}{2}LI^2$$



$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$\therefore W_c = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CV_0^2 \cos^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{4}CV_0^2 (1 + \cos 2\omega t)$$

$$I(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin \omega t$$

$$\therefore W_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}CV_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{1}{4}CV_0^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

静電エネルギー

$$W_c = \frac{1}{4}CV_0^2 (1 + \cos 2\omega t)$$

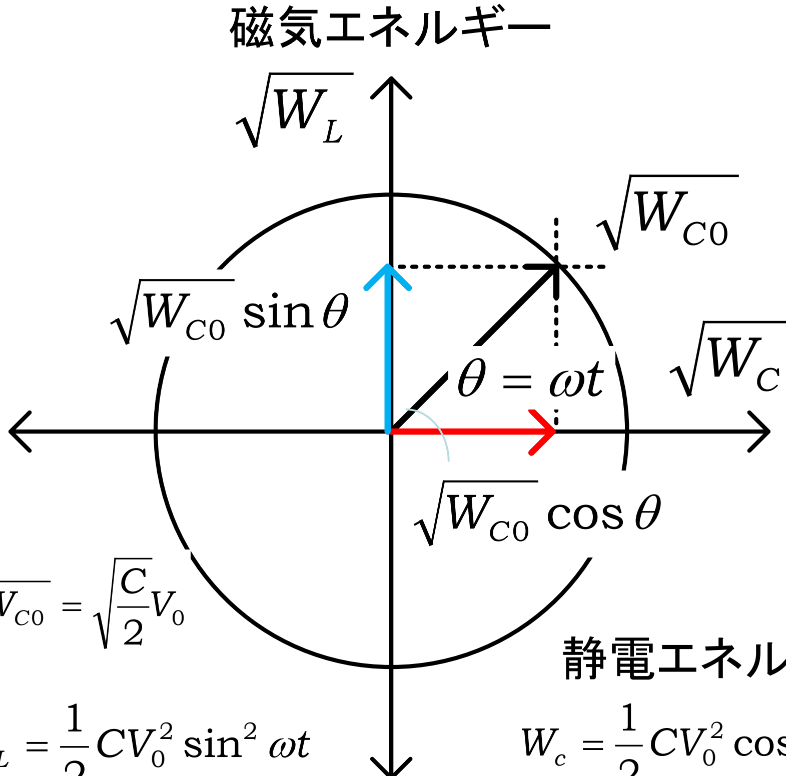
磁気エネルギー

$$W_L = \frac{1}{4}CV_0^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

エネルギー交換から生じる電気振動

電気的振動は静電エネルギーと磁気エネルギーの交換から生じる

静電エネルギーと磁気エネルギー



$$\sqrt{W_{C0}} = \sqrt{\frac{C}{2}}V_0$$

$$W_L = \frac{1}{2}CV_0^2\sin^2\omega t$$

$$\sqrt{W_L} = \sqrt{\frac{C}{2}}V_0\sin\omega t$$

静電エネルギー

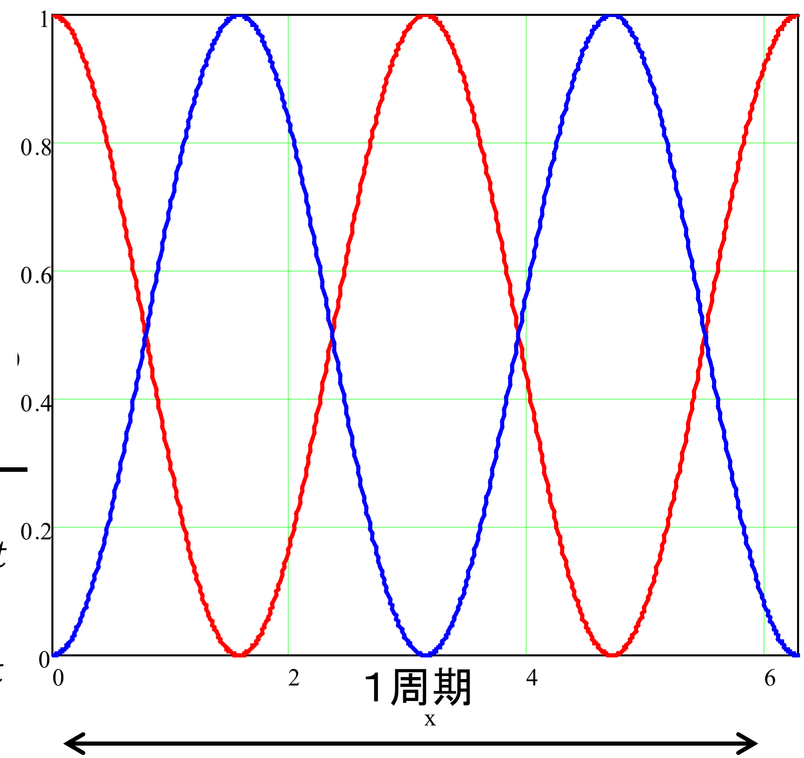
$$W_c = \frac{1}{2}CV_0^2\cos^2\omega t$$

$$\sqrt{W_c} = \sqrt{\frac{C}{2}}V_0\cos\omega t$$

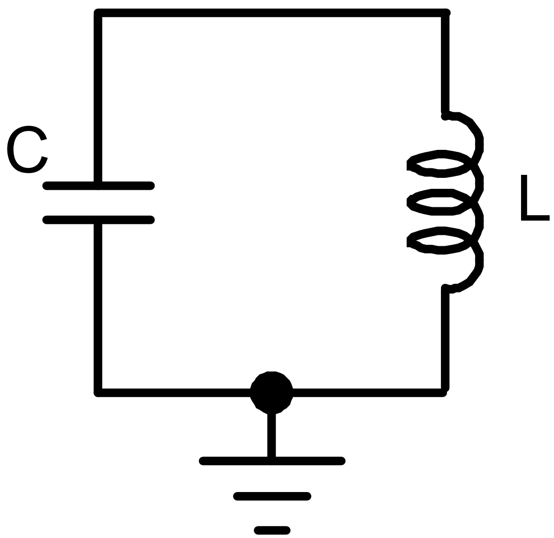
赤 : 静電エネルギー
青 : 磁気エネルギー

$$W_c = \frac{1}{4}CV_0^2(1+\cos 2\omega t)$$

$$W_L = \frac{1}{4}CV_0^2(1-\cos 2\omega t)$$



振動周波数と特性インピーダンス



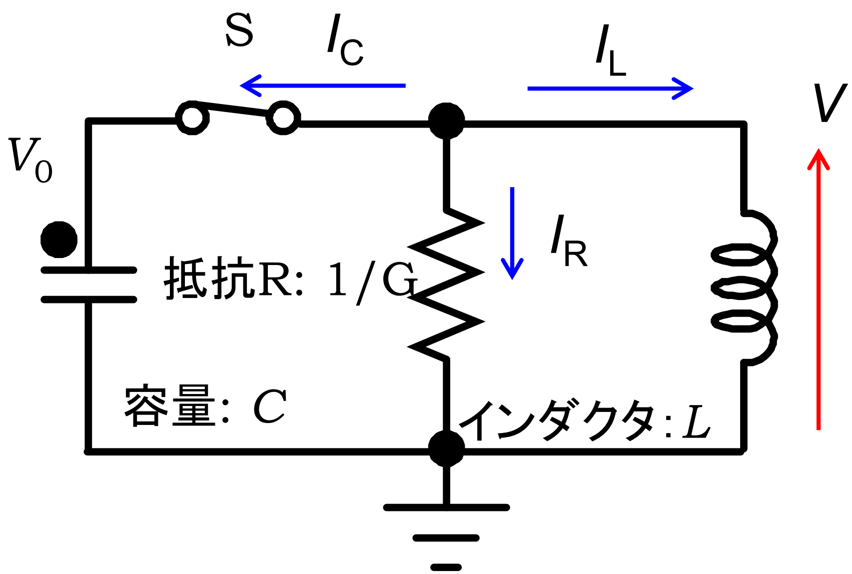
振動角周波数 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

特性インピーダンス $Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

容量とインダクタと抵抗の回路の応答

抵抗・容量・インダクタの回路

容量Cに電荷を蓄積し，発生した電圧をV_0とする。
t=0でスイッチを閉じた時に電圧Vはどのようになるか。



各素子の電流は。。。

$$I_C = C\frac{dV}{dt}$$

$$I_R = GV$$

$$I_L = \frac{1}{L}\int V dt$$

キルヒホッフの電流則より。。。

$$I_C + I_R + I_L = 0$$

微分方程式は。。。

$$C\frac{dV}{dt} + GV + \frac{1}{L}\int V dt = 0$$

$$\therefore C\frac{d^2V}{dt^2} + G\frac{dV}{dt} + \frac{V}{L} = 0$$

抵抗・容量・インダクタの回路の時間応答

回路の応答はλが実根の場合は振動成分が生ぜず，
λが複素根のときに振動成分が発生する

微分方程式は

$$C\frac{d^2V}{dt^2}+G\frac{dV}{dt}+\frac{V}{L}=0$$

$V(t)=A_0e^{\lambda t}$ とすると $\dfrac{dV}{dt}=\lambda V,\quad \dfrac{d^2V}{dt^2}=\lambda^2 V$

したがって

$$C\lambda^2+G\lambda+\frac{1}{L}=0$$

2次方程式の根より

$$\lambda=\frac{-G\pm\sqrt{G^2-4\frac{C}{L}}}{2C}$$

$G<2\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ のときは複素根となり

$$\lambda=\frac{-G\pm j\sqrt{4\frac{C}{L}-G^2}}{2C}\qquad \left(R>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

複素根の場合は

$$\sigma=-\frac{G}{2C}$$

$$\omega=\frac{\pm\sqrt{4\frac{C}{L}-G^2}}{2C}=\pm\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{G}{2C}\right)^2}$$

$$V(t)=A_0e^{\lambda t}=A_0e^{(\sigma+j\omega)t}+A_0e^{(\sigma-j\omega)t}$$
$$=A_0e^{\sigma t}\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)$$

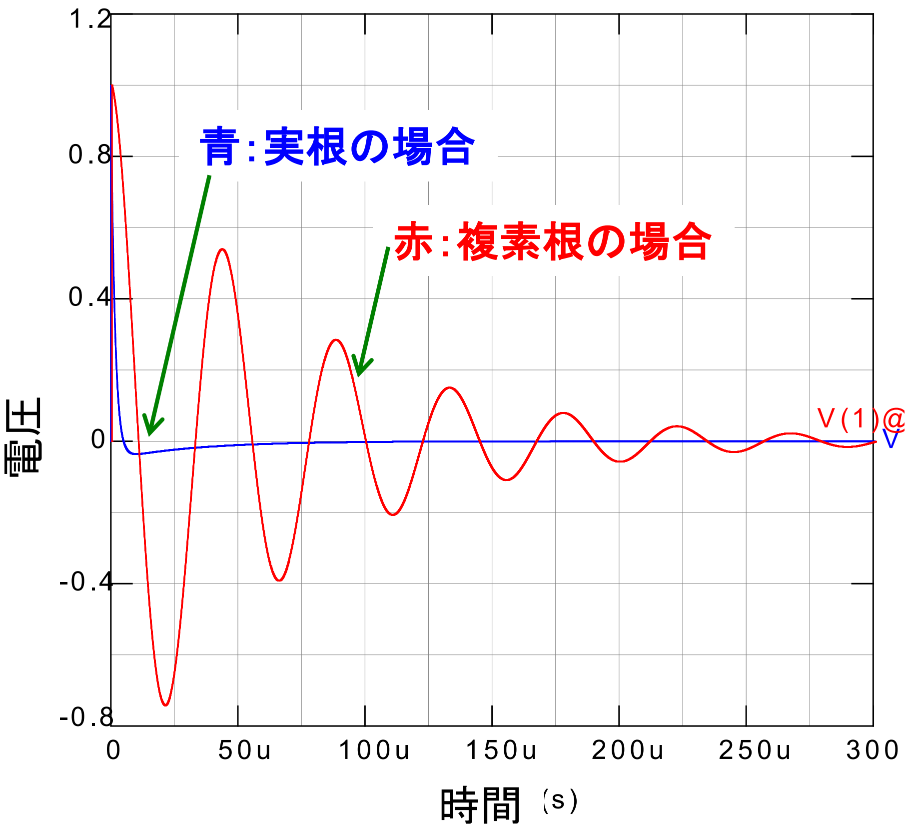
$t=0$ で $V(t)=V_0$ なので $V(t)=V_0e^{\sigma t}\left(\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}\right)=V_0\underbrace{e^{\sigma t}}_{\text{減衰項}}\underbrace{\cos\omega t}_{\text{振動項}}$

根による時間応答の違い

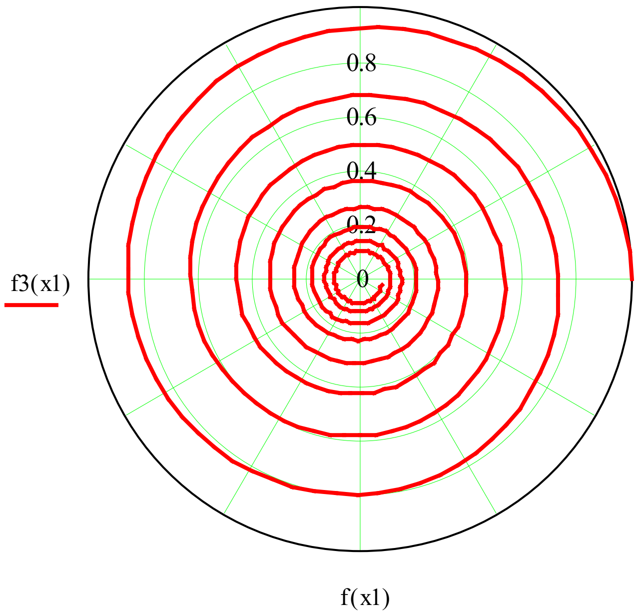
微分方程式が実根の場合は減衰するだけで振動成分は発生しない。
複素根の場合は振動成分が発生し，減衰振動になる。

$$V(t) = e^{\sigma t}\cos\omega t$$

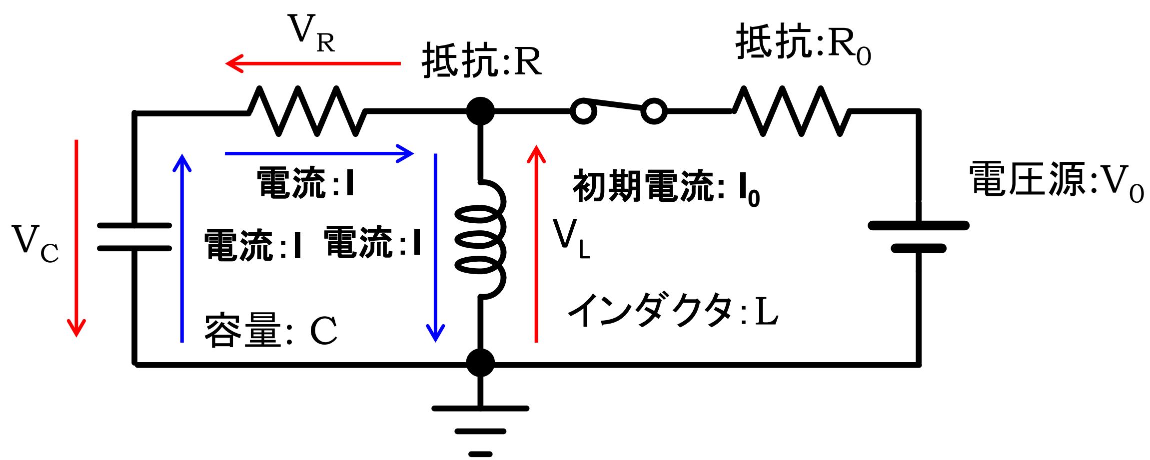
減衰振動波形



$\sigma < 0$ 複素平面上の動き



LCR直列接続回路



各素子の電圧は。。。

$$\left.\begin{aligned} V_C &= \frac{1}{C}\int I dt \\ V_R &= RI \\ V_L &= L\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\}$$

キルヒホッフの電圧則から。。。

$$V_C + V_L + V_R = 0$$

微分方程式は。。。

$$\frac{1}{C}\int I dt + RI + L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

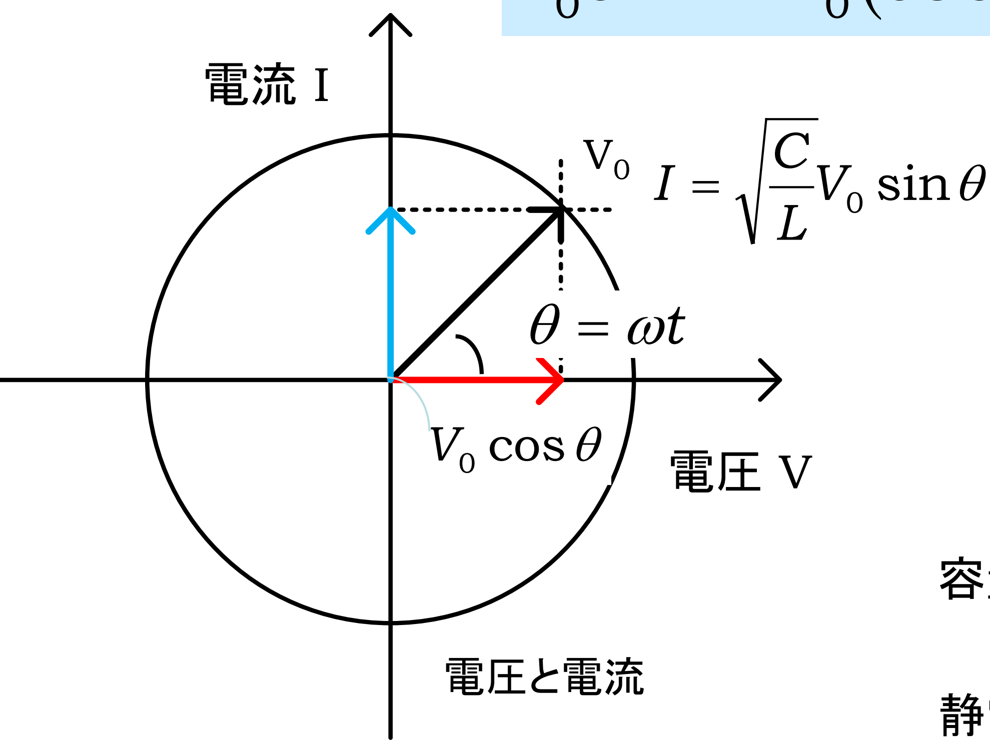
$I(t) = A_0 e^{\lambda t}$ を仮定すると $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$ $\qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}$

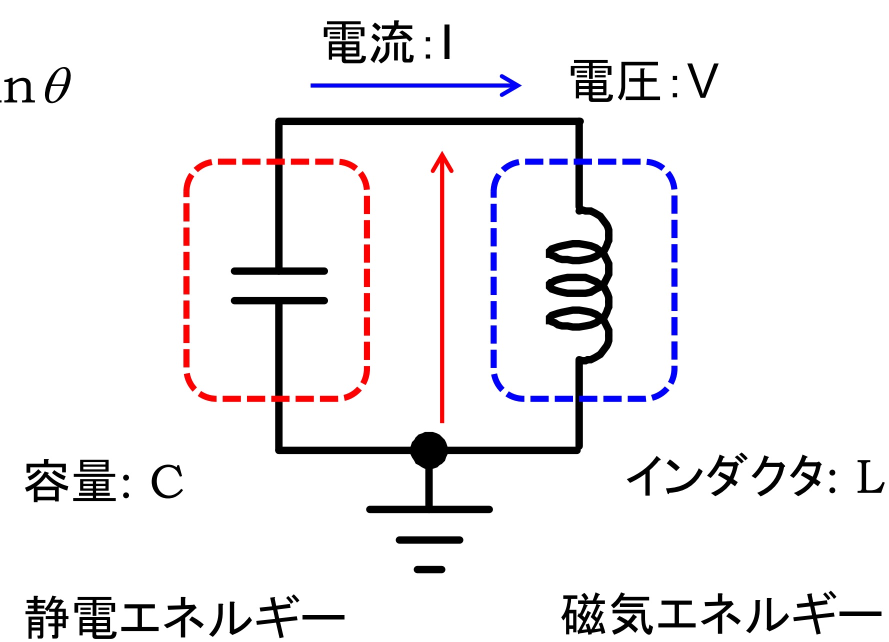
初期電流は$t = 0$でI_0 $\qquad I(t) = \dfrac{I_0}{2}\left(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}\right)$ 振動成分が現れるのは $R^2 < 4\dfrac{L}{C}$ のとき

なぜ複素数で電気信号を表すのか？

実数だけを用いると，振動現象の背後にある静電エネルギーと磁気エネルギーの交換を表せない。複素数を用いることにより，総エネルギー量（絶対値）と静電エネルギーと磁気エネルギーの比率（位相）が表現でき，振動の本質を表すことができる。

$$V_0 e^{j\omega t} = V_0\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right)$$

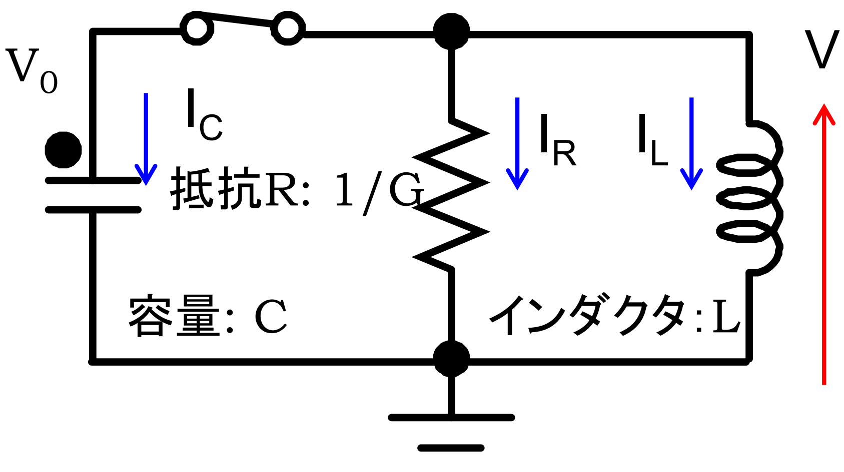




電気回路と複素数

電気素子(RCL)は電圧・電流の関係が比例・積分・微分(PID)　の関係にあり，その応答は2次の微分方程式で表される。解は複素数の指数関数となる。

静電エネルギーと磁気エネルギが交換されるときの解は虚数を含み，正弦波の振動を発生させる。解の実数部分は電磁エネルギーの減衰を表す。



複素数は電気回路の基本

$$\lambda = \frac{-G \pm \sqrt{G^2 - 4\frac{C}{L}}}{2C}$$

$$V(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{(\sigma + j\omega)t}$$

$$I_C = C\frac{dV}{dt}$$ D:微分項

$$I_R = GV$$ P:比例項

$$I_L = \frac{1}{L}\int V dt$$ I:積分項

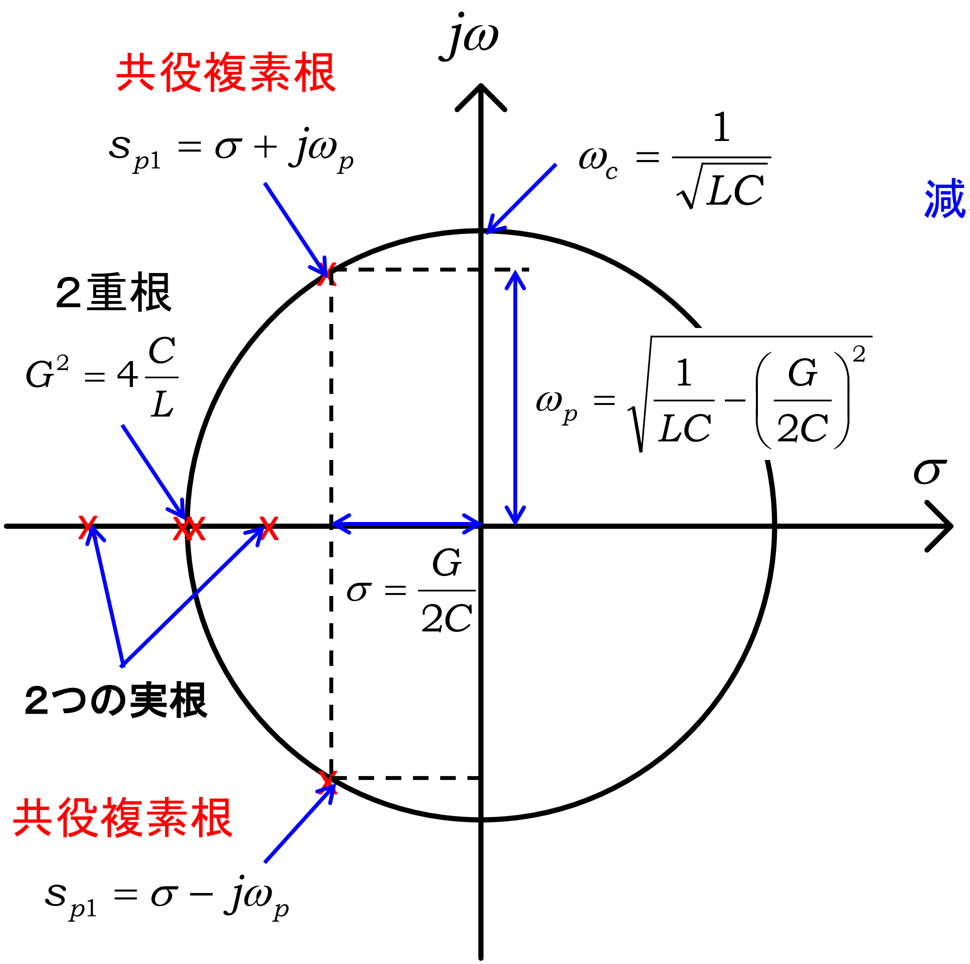
$$C\frac{d^2V}{dt^2} + G\frac{dV}{dt} + \frac{V}{L} = 0 \qquad V(t) = Ae^{\lambda t}$$

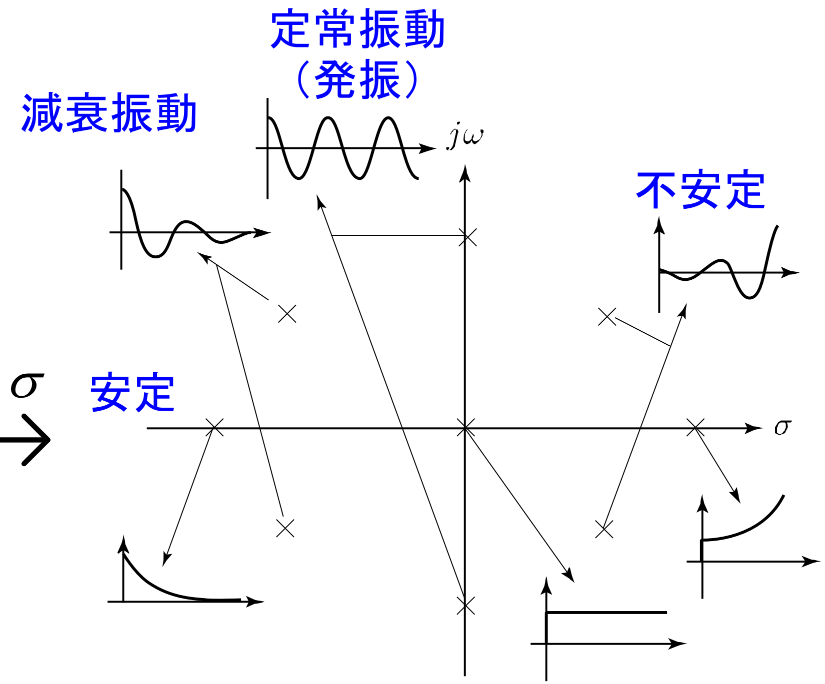
$$C\lambda^2 + G\lambda + \frac{1}{L} = 0$$

λは次のラプラス変換で出てくるポール：s_pに等しい

根の位置と時間応答

根の位置により時間応答が決まる





オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

このオイラーの公式は電気電子工学に拘わらず，工学一般において最も重要な公式と言ってよい。
これからも頻繁に出てくるので，しっかり覚えておこう。