複素数と複素平面

- 複素数の定義
- 複素平面
- 極形式
- ド･モアブルの定理
- n 乗根, 複素平面図形

虚数単位の導入

２乗するとー１となる数を**虚数単位**と定義する.

すなわち、

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\Leftrightarrow \quad i \times i = -1$$

実数ではありえない数をあらたに定義している.
→他の演算規則は別途
　定める

（注）i を j ,あるいは, $\sqrt{-1}$ と表す場合もある.

この定義は, 虚数単位 i の定義であると同時に,
虚数単位同士の乗算（×）の定義も含んでいる.

虚数単位 i を含む式の計算規則

結論を先にまとめておく

- $i \times i$ が出てきたら $= -1$ とする.
- 上記以外は, i がまるであたかも実数の文字変数であるかのように実数の計算規則を適用してよい.
- 実数は実数同士, 虚数は虚数同士で加減算
- 最終形は （実数）＋（実数）$\times i$

たとえば $1+2i$ や, $x+iy$ のように表す.
$\Rightarrow$「複素数」の表現

例）虚数単位 i の整数乗 (i^n)

$$i^3 = \underbrace{i \times i}_{i^2=-1} \times i = (-1) \times i = -i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

よって, i^n は, nが正の整数なら必ず, 1, i, -1, $-i$ のうちのどれかになる.

それでは, nが負の整数の場合はどうか？ $n=-1$ の場合を計算すると

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{(-1)} = -i$$

結局, i^n は, nが整数なら必ず, 1, i, -1, $-i$ のうちのどれかになる.
（ i^0は1と定める）

虚数の計算規則が決まるまで

- 実数の計算規則ではありえない数 i を定義して、なおかつ、その数を実数と一緒に加減乗除することには、導入当初はとても大きな心理的な抵抗が伴ったはずである.
- 虚数が普通に使われるようになった現在では注意を払う必要は特にないが、虚数の計算規則のからくりに少しだけ触れておく.
- このからくりに皆が納得したのは、複素平面上で i の意味が明らかになって以降のこと.

虚数単位と乗算（×）の意味

- 実数には含まれない新たな数として虚数単位 i を導入したのだから，i との乗算は，あらたに定義された演算と考えるべき．

- そこで，虚数単位 i を含む乗算規則を，次の方針によって新たに定義する．

  まず，

  - $\boxed{i \times i = -1}$ （虚数単位の定義そのものだが，実数では成り立たない）

そして，上記以外は，実数の乗算規則に準じる．

(ただし，i は実数の文字変数であるかのように扱う)

あたらしい乗算（×）の規則

乗算（×）	実数	i
実数	(実数)×(実数)	(実数)× i
i	i ×(実数)	-1 New!

実数の乗算規則に従う

(ただし, i は実数の文字変数であるかのように扱う)

（例）

$$0 \times i = i \times 0 = 0$$

$$1 \times i = i \times 1 = i$$

$$-1 \times i = -i$$

$$2 \times i = 2i$$

これらは実数の乗算規則から当然に導かれるものではなく, i との乗算規則をあらためて上記のように定義したものである.

除算の定義

i による除算を，実数の除算に準じて以下のように定義する．

（1） $i \div i = 1$

（2） $0 \div i = 0$

この規則と $i \times i = -1$ を使って $1 \div i$ を計算すると

$$1 \div i = (-1) \times i \times i \div i$$

$$= (-1) \times i \times 1$$

(結合則を仮定している)

$$= -i$$

$$\boxed{1 \div i = \frac{1}{i}}$$

よって，（実数）$\div i =$ －（実数）$\times i$
となり，i の乗算に帰着する．

分数表記も実数と同様に使える．

以上の演算規則により，虚数単位iをあたかも実数の文字変数とみなして演算を実行しても矛盾が生じない．

しかし，実数ではありえない乗算の規則を定義してしまったが，四則演算に矛盾は生じないのだろうか？

実は，加算（＋）の定義に工夫を加えることで，矛盾の無い四則演算が可能になっている．

では，その加算の定義とは？

あたらしい加算（＋）の規則

加算（＋）	実数	i
実数	(実数)＋(実数)	New! (実数)＋ i
i	i＋(実数)	$2i$

実数に準じた加算規則

演算を行わない,という規則

(定義はされているが，操作としては<u>何もしない</u>)

純虚数の定義

（実数）×虚数単位iを純虚数と定義する.

純虚数同士の和の定義

純虚数同士の和（＋）には、

（1）交換法則と分配法則が成り立つ

$$y_1 \times i + y_2 \times i = (y_1 + y_2) \times i$$

（2）実数同士の演算は実数の演算規則に従う

と定義する.

（例）
$$2i + 3i = (2+3) \times i$$
$$= 5 \times i$$
$$= 5i$$

純虚数同士の加算・減算は,
たとえば,

$$i - i = 1 \times i + (-1) \times i$$

$$= (1-1) \times i = 0 \times i = 0$$

のように，分配法則を認めたうえで,
係数の実数同士を加減算している.

実数と純虚数の加算の定義

実数と純虚数の和（＋）には、

（1）交換法則が成り立つ

（2）上記以外の演算操作は何もしない

と定義する.

以上の規則に従うと、i と実数を両方含む数は、最終的に次の形に一意に表される.

$$（実数）＋（実数）\times i$$

（四則演算が終了した形）

複素数の定義

Complex number

複素数 z は，独立な2つの実数と虚数単位 i の組み合わせにより次のように表される.

$$z = (\text{実数}) + (\text{実数}) \times i$$

$$= \underline{x} + i\,\underline{y}$$

実部 (Real part) $\mathrm{Re}\, z$

虚部 (Imaginary part) $\mathrm{Im}\, z$

複素数0の定義

$$\boxed{z = x + iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ かつ } y=0}$$

複素数の等価性

２つの複素数 $z_1=x_1+iy_1$ と $z_2=x_2+iy_2$ が等しい

$\Leftrightarrow \quad z_1 = z_2$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$ かつ $y_1 = y_2$ （実部と虚部がそれぞれ等しい）

（複素数0の定義から導かれる）

複素数の四則演算のポイント

- 実数同士の四則演算から虚数は出てこない
  ⇒実数同士の演算規則を修正する必要は無い

- 虚数同士，および，虚数と実数の乗除算では、
  結果が実数になるものがあるので，

$$i \times i = -1, \quad \underbrace{0 \times i = 0, \quad 0 \div i = 0, \quad i \div i = 1}_{\text{実変数に対する計算規則と同等}}$$

注意深い再定義が必要だったが，その結果，

$i \times i = -1$以外は，虚数単位 *i を実数の文字変数とみなして四則演算を実行*しても矛盾を生じないように計算規則を定義することができた.

$$z = \overbrace{(\text{実数})}^{\text{実部}(Re\ z)} + \overbrace{(\text{実数})}^{\text{虚部}(Im\ z)} \times i$$

この「＋」記号は, 実部と虚部に対してなんらかの演算操作を行っているわけではない. 決して「加算」していない.

この「＋」記号は、複素数同士の四則演算の途中過程において, 実数同士の加減算に利用するために, 準備的にここに置いてあるだけ. この「＋」記号は、複素数の定義にとっては本質的には不要だが, 四則演算に都合が良いのでこの表記がよく使われる. 複素数の定義に本質的なのは, 実部と虚部の独立な2つの実数を指定する, ということだけである.

複素数⇔2次元平面座標あるいはベクトル

虚数の歴史

- 1545年ジェロラモ･カルダーノ，1569年ラファエル･ボンベリらは三次方程式の解の公式を研究する中で，負数の平方根という考えをはじめて導入し，虚数の概念が生まれるきっかけを作った．
（当時はまだ0や負の数にも抵抗があり，「虚数」を数として認めるには尚早であった．）
- 1637年，ルネ･デカルトは 著書「幾何学」で虚数を「想像上の数」と名付け，これが英語のimaginary numberの語源になった．
- 1777年レオンハルト･オイラーが虚数を i と表した
- 1797年カスパー･ベッセル，1831年頃ガウスにより複素平面の考えが発表され，虚数の意味が理解されて世に広まった．複素数が数として認められ,使われるようになったのはこれ以降．

虚数が数として認められて広く使われるまでに300年くらいかかっている．．．

複素数の四則演算

- 実部と虚部の項に分離して別々に計算する
- 乗算などで i^2 が出てきたら -1 に代える
- 除算では分母を実数化（有理化）する

加算

実数を前へ，虚数を後ろへ

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+(iy_1+iy_2)$$

$$=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2)$$

減算

実数を前へ，虚数を後ろへ

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+(iy_1-iy_2)$$

$$=(x_1-x_2)+i\,(y_1-y_2)$$

乗算

$x_1 x_2 \quad iy_1 iy_2 = -y_1 y_2$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \underbrace{(x_1 x_2 - y_1 y_2)}_{\text{(実部)}} + i\,\underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{\text{(虚部)}}$$

$iy_1 x_2$

$x_1 i y_2$

除算

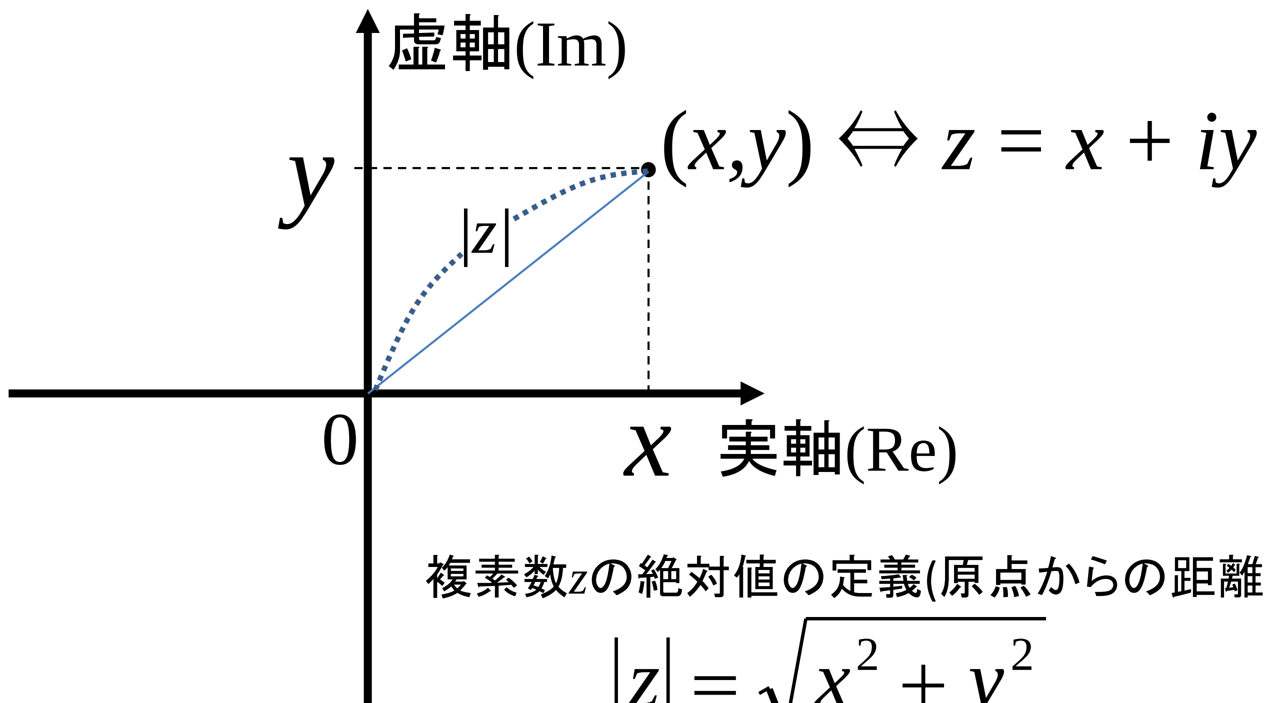
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{(x_2 + iy_2)\boxed{(x_1 - iy_1)}}{(x_1 + iy_1)\boxed{(x_1 - iy_1)}}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\,\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

分母の複素共役を
分母分子に掛けて
分母を実数化

複素平面

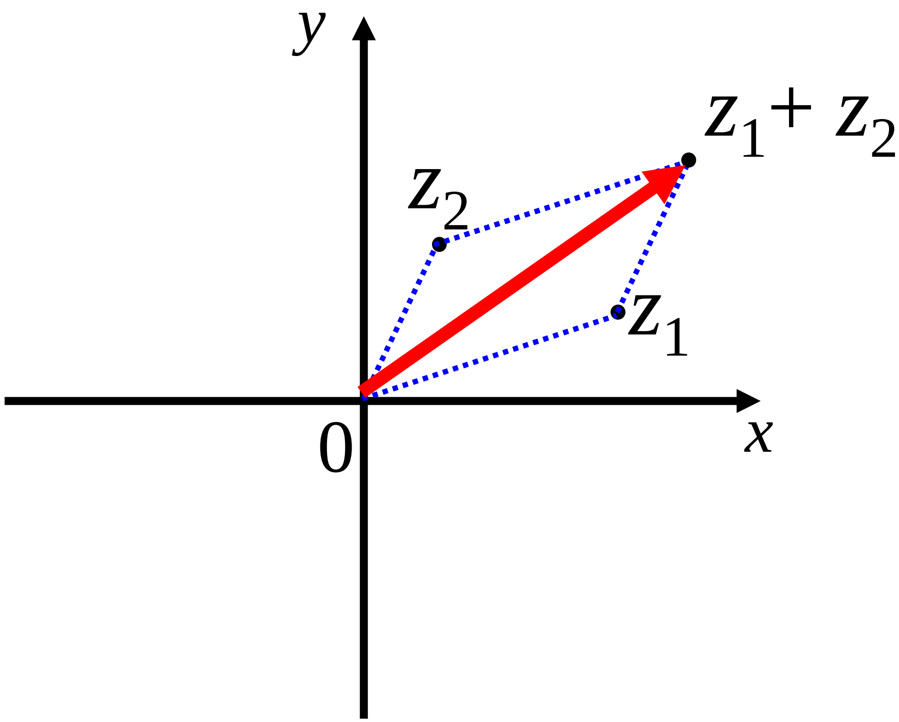
複素数 $z = x + i\,y$ を, xy平面上の点(x,y)に1対1対応させる → $\boxed{\text{複素平面（複素数平面）}}$



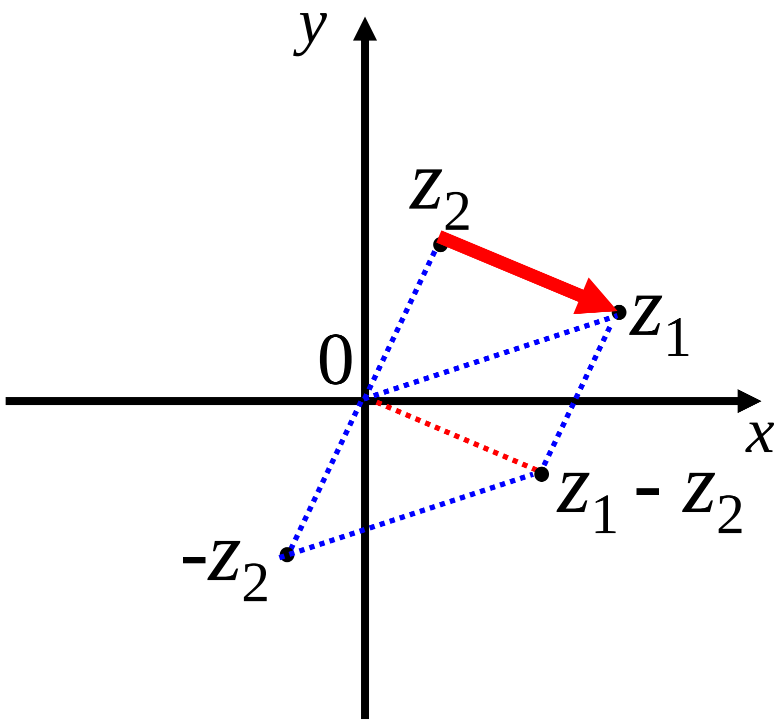
複素数zの絶対値の定義(原点からの距離)

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

複素数の和と差



複素数の和はベクトル和



複素数の差はベクトル差

複素平面上のベクトル演算に対応

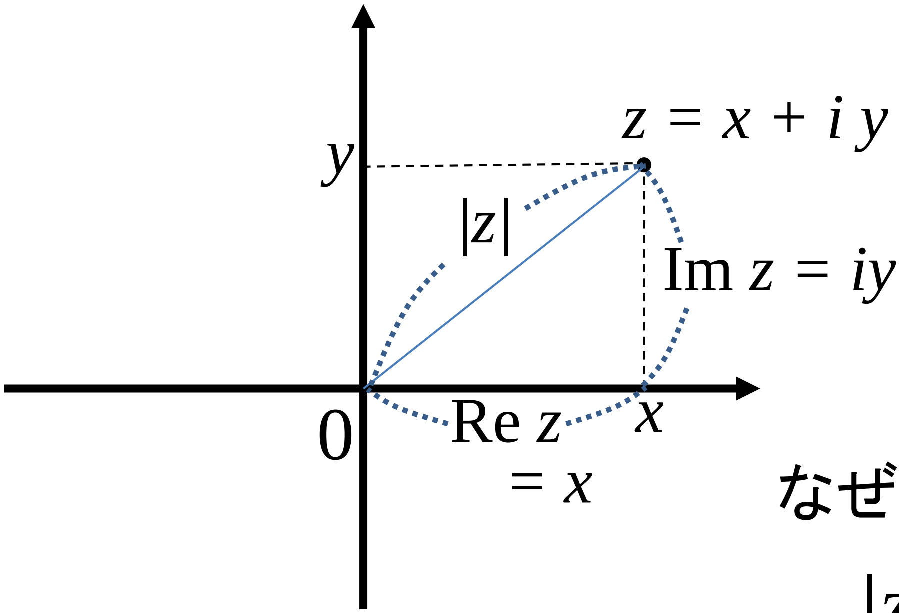
(∵実部は実部同士，虚部は虚部同士で加減算するから)

疑問？

- 複素数の演算は2次元ベクトルの演算と対応している
- ２次元平面上のベクトル解析は複素数の計算に帰着できる
- では，３次元ベクトル解析を実現する複素数のような代数はないのだろうか？

複素数の絶対値の性質

$|z|$は，zの原点からの距離



$$|z|^2 \geqq (\mathrm{Re}\ z)^2$$

かつ

$$|z|^2 \geqq (\mathrm{Im}\ z)^2$$

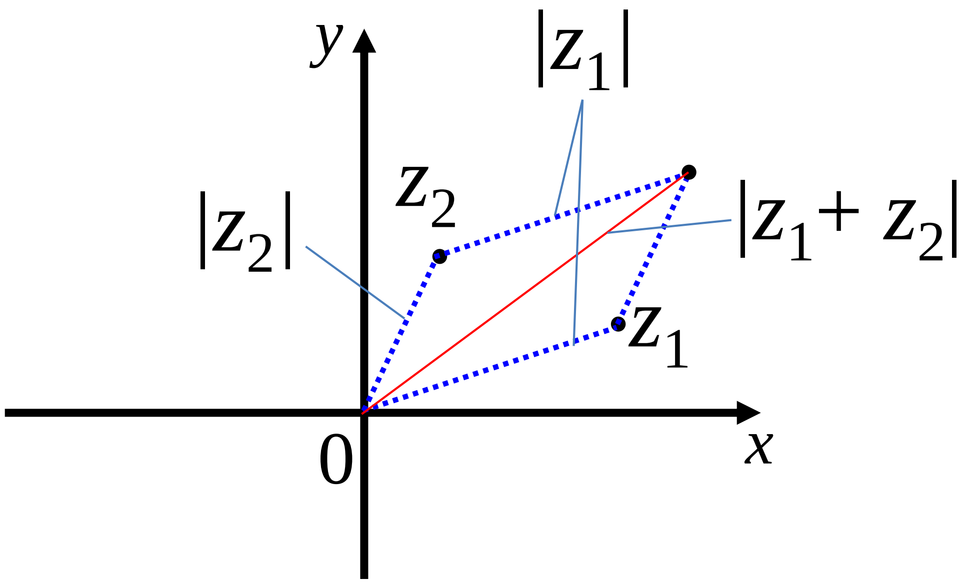
なぜなら，

$$|z|^2 = (\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2$$

$$= \quad x^2 \quad + \quad y^2$$

（三平方の定理）

複素数の絶対値の性質



三角不等式

$$|z_1+z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$$

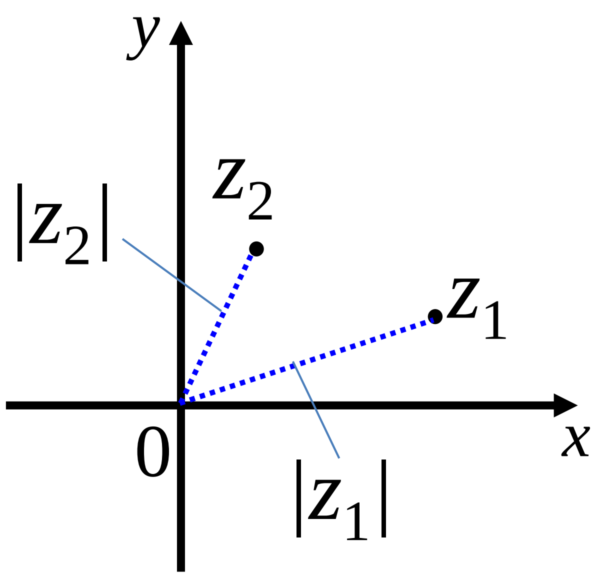
(→証明は演習問題)

一般化された三角不等式 （帰納法で証明）

$$|z_1+z_2+\cdots+z_N| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_N|$$

複素数の絶対値の性質

- 複素数の絶対値（大きさ）は実数なので，
  大小関係が定義できるが，
  複素数そのものには不等号は定義されない．



$$|z_1| \geqq |z_2|$$

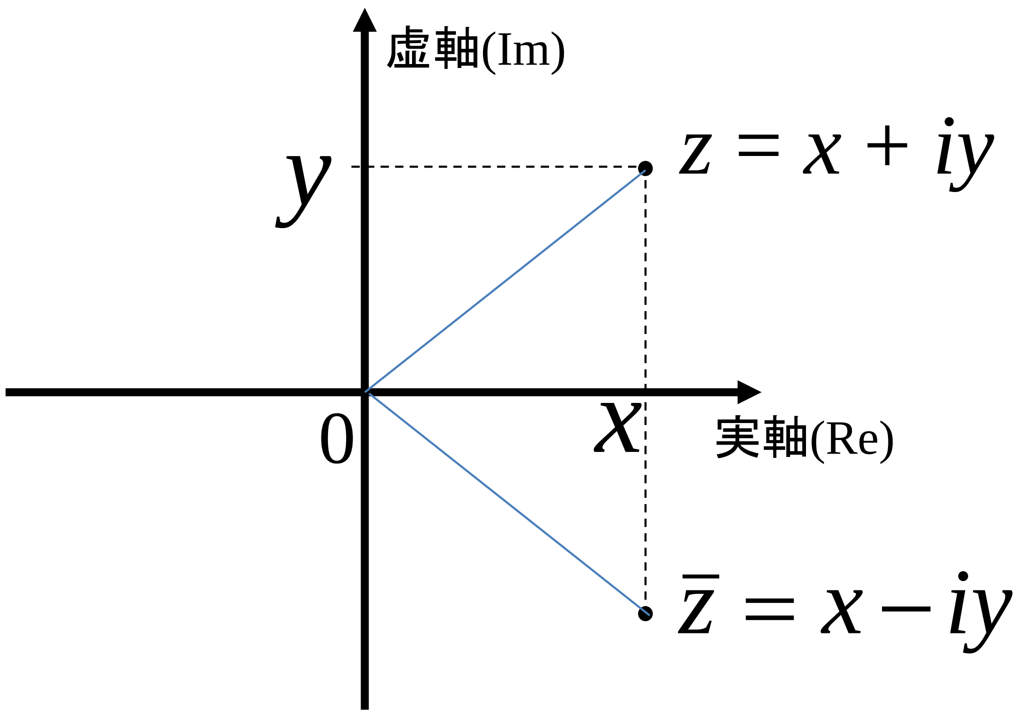
$$z_1 \geqq z_2$$

0との大小関係も定義できないので，複素数には正負（±）の概念はない．

共役複素数

Complex conjugate

複素数 $z=x+iy$ の共役複素数⇒ $\boxed{\bar{z}=x-iy}$



実軸に対して対称の位置にある

複素数から実部と虚部を求める

複素数 $z=x+iy$ の

$$実部\,(\mathrm{Re}\,z) = x = \frac{\overbrace{z}^{x+iy} + \overbrace{\bar{z}}^{x-iy}}{2}$$

$$虚部\,(\mathrm{Im}\,z) = y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

共役複素数の公式

以下の公式を証明せよ. (計算で多用する)

(a) $$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

(b) $$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

(c) $$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$$

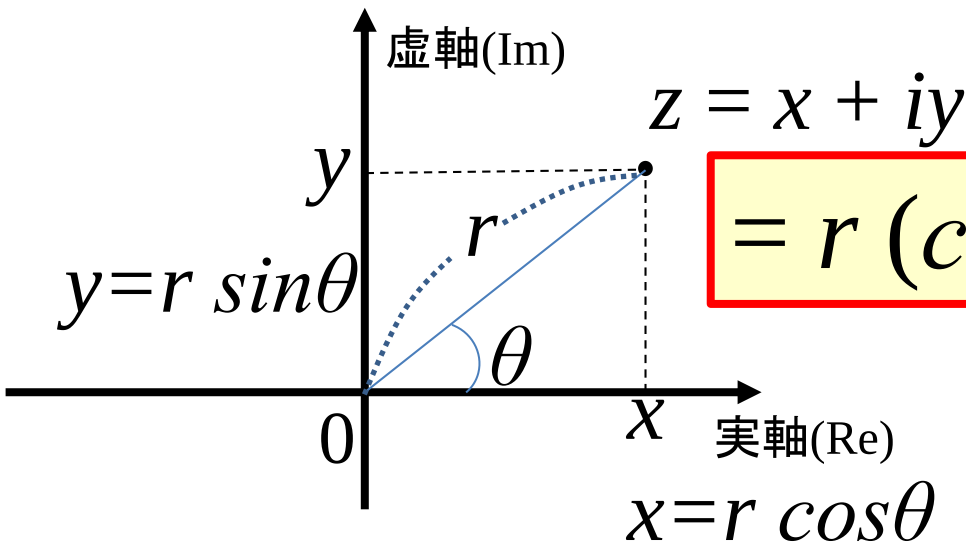
(d) $$\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$$

(e) $$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

(f) $$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

極形式

複素数は，複素平面上の点に対応するので，極座標（原点からの距離と実軸との角度）で表すことができる．



$$\boxed{= r\,(cos\theta + i\ sin\theta)}$$

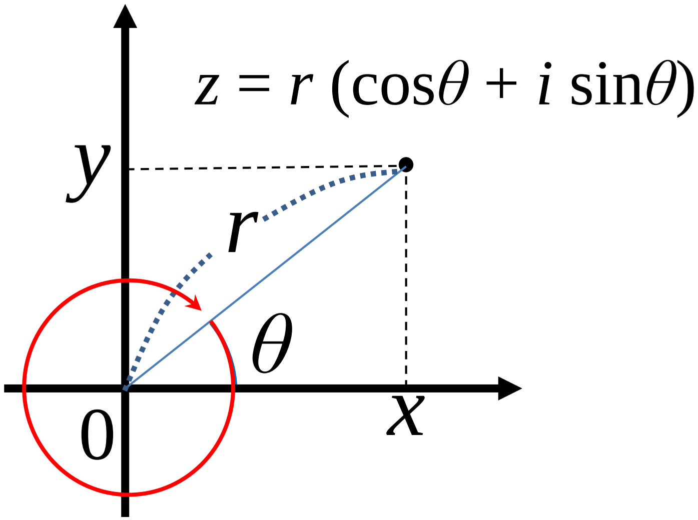
極形式

ただし，

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$\boxed{\theta : \text{偏角} = \arg z}$$

偏角の表現と主値



偏角θを

$\theta = \arg z$ と定義したが，実は

$$\arg z = \boxed{\theta + 2n\pi}$$

(n は整数)

なので，偏角の表し方は無限にたくさんある.

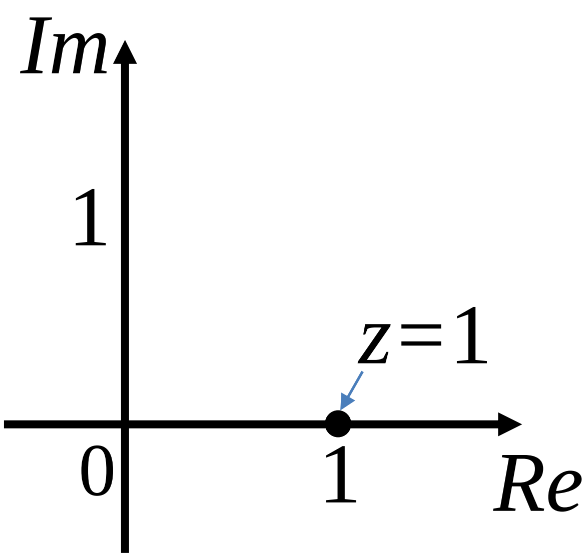
これを一意に表したい場合は範囲を限定する必要がある．たとえば，$-\pi < \theta \leqq \pi$　または $0 < \theta \leqq 2\pi$.

この範囲の偏角を**主値**といい，$\mathrm{Arg}\,z$ と表す.

極形式による複素数の表現

（例1）$z=1$ を極形式で表せ.

（解答） zの大きさは1, 偏角は $2n\pi$ なので,



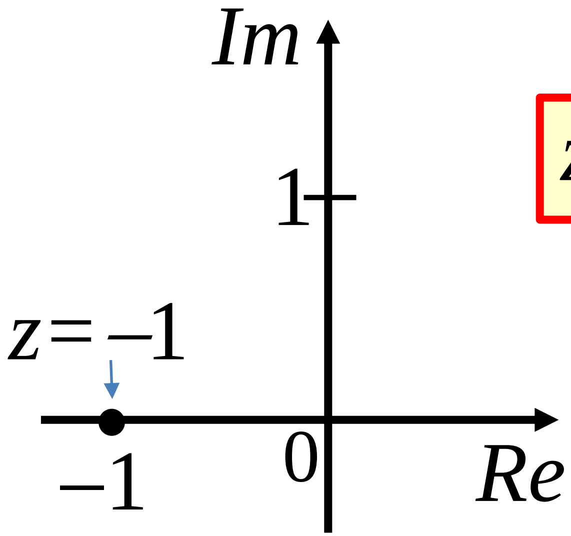
$$\boxed{z=\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi}$$

極表示は複素平面上にプロットして確認するとよい

極形式による複素数の表現

（例2）$z = -1$ を極形式で表せ.

（解答） zの大きさは1, 偏角は $\pi+2n\pi$ なので,



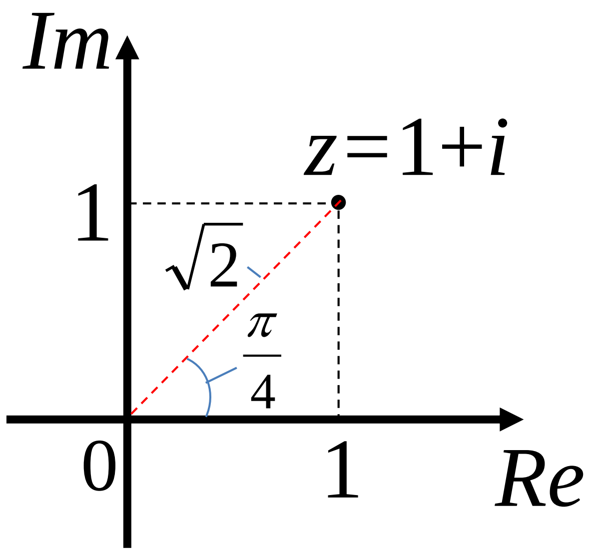
$$\boxed{z = \cos(\pi + 2n\pi) + i\sin(\pi + 2n\pi)}$$

極形式の場合，先頭の係数は必ず正の実数.
（複素数の大きさ|z|を表しているから）

極形式による複素数の表現

（例3）$z = 1 + i$ を極形式で表せ.

（解答） zの大きさは√2, 偏角はπ／4なので,



$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

(偏角は主値(Arg))

$$z = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right\}$$

(偏角をargで表記した場合. n=0, ±1, ±2,...)

複素数の積の図的な意味

２つの複素数 $z_1 = \underline{r_1 (cos\theta_1 + i\, sin\theta_1)}$ と $z_2 = \underline{r_2 (cos\theta_2 + i\, sin\theta_2)}$ の積を計算する

$$z_1 z_2 = \ r_1 (cos\theta_1 + i\, sin\theta_1)\, r_2 (cos\theta_2 + i\, sin\theta_2)$$

$$= r_1\, r_2 \{(cos\theta_1 cos\theta_2 - sin\theta_1 sin\theta_2) + i\, (sin\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sin\theta_2)\}$$

三角関数の加法定理を使って整理すると,

$$= r_1\, r_2 \{cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

よって, 絶対値は積で, 偏角は和で与えられる.

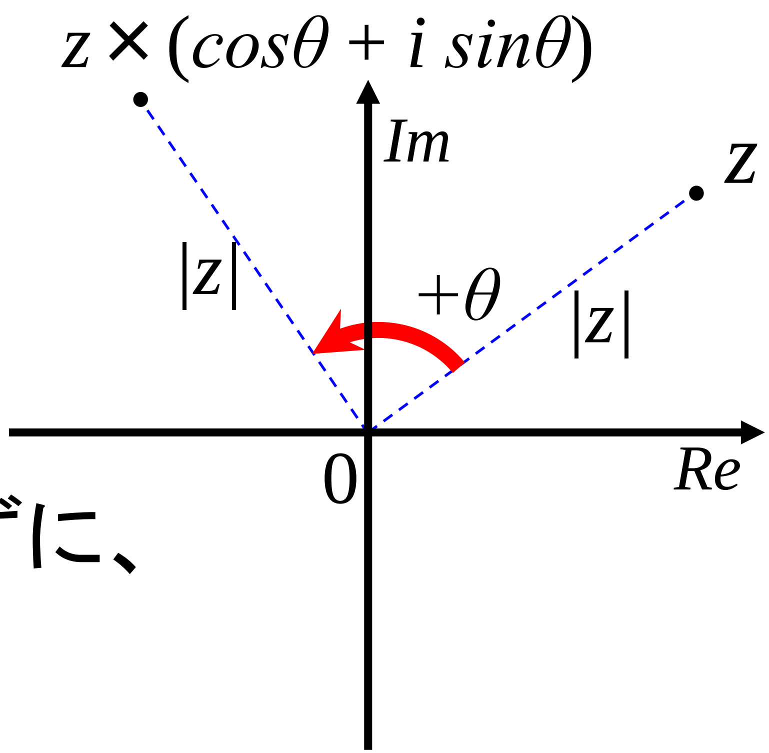
$$|z_1\, z_2| = \underbrace{|z_1|}_{r_1}\, \underbrace{|z_2|}_{r_2} \qquad arg(z_1\, z_2) = \underbrace{arg(z_1)}_{=\theta_1} + \underbrace{arg(z_2)}_{=\theta_2}$$

偏角の加算

$r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ に

大きさ1で偏角θの複素数は (r=1を代入して)

$$cos\theta + i\ sin\theta$$



0ではない複素数 z に,
上記の複素数を乗ずると

大きさ(絶対値)は変わらずに、

偏角がθ増加する.

（問）実数同士の乗算は複素平面上ではどのような操作になるか？

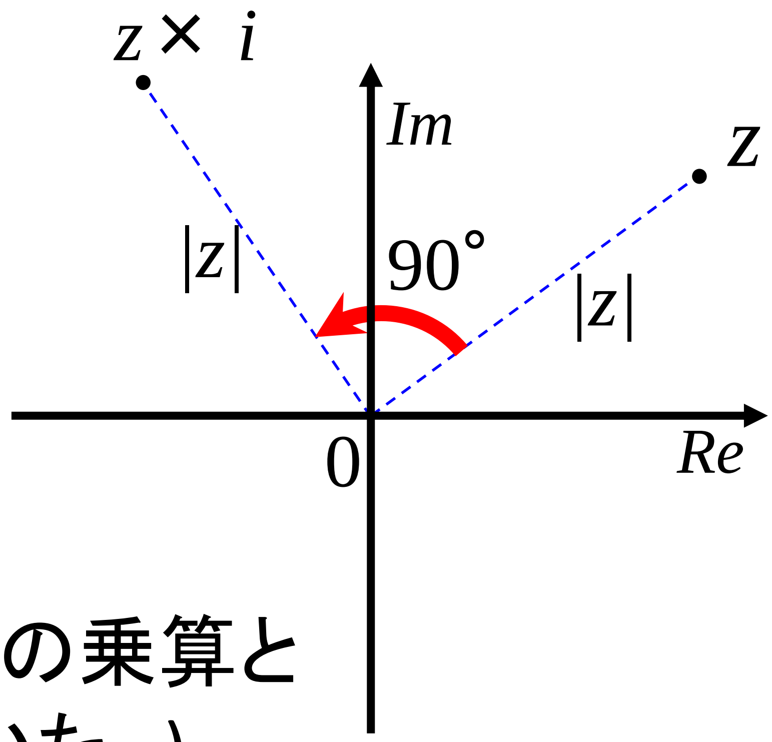
(例)虚数単位 i の乗算

複素数 i は，大きさ1, 偏角 π／2 なので,

複素数 z に，i を乗ずると,

大きさは変わらずに,

偏角が 反時計回りに
π/2 回転する.



虚数iの「乗算」の意味.(実数の乗算とは異なる意味が与えられていた.)

複素数の除算(極形式)

２つの複素数 $z_1=r_1\,(cos\theta_1 + i\,sin\theta_1)$ と $z_2=r_2\,(cos\theta_2 + i\,sin\theta_2)$ について，以下の関係式を証明しなさい．

(1) $$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = \frac{r_2}{r_1}$$

複素数の割り算の絶対値は絶対値の割り算

(2) $$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1$$

複素数の割り算の偏角は偏角の差

すなわち，

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\left\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\right\}$$

前半の確認事項

- 複素数の実部と虚部が求められる
- 複素数の和差積商を求められる
- 複素数を極形式で表すことができる
- 複素数の偏角を求めることができる
- 主値とは何か説明できる
- 複素数の加減乗除を複素平面上に表せる

ド･モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(ただし, n は整数)

（大きさ1, 偏角θの複素数をn回乗ずることは, 反時計回りに角度$n\theta$だけ回転させること）

(証明) 複素数の積の公式(偏角は和になる)より

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos(\theta+\theta) + i\sin(\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta + i\sin 2\theta\end{aligned}$$

(複素数の積, 偏角の和)

また,

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta\end{aligned}$$

よって帰納法により, n=1,2,3...に対して与式を得る.

ド･モアブルの定理

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(ただし，n は整数)

（大きさ1, 偏角θの複素数をn回乗ずることは，反時計回りに角度$n\theta$だけ回転させること）

(証明のヒント)

$n<0$に対しては，複素数の除算の定義(z_2/z_1)において，

$z_2=1$, $z_1=z^n$ とおくと，n= −1,−2,−3…に対しても

同様に成り立つことが証明できる.

複素数のn乗

複素数 $z = r\,(cos\theta + i\ sin\theta)$ に対して,

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

ド・モアブルの定理を用いて

$$= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

(ただし, n は整数)

複素数のn乗根

複素数 $z = w^n$ であるとき,
w を z の n 乗根といい,
次式で表す.

$$\boxed{w = \sqrt[n]{z}}$$

(ただし, n は自然数)

n乗根の表式

zのn乗根wを，$w = R\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ とおくと，

定義により，

$$z = w^n = R^n\,\underline{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}$$

ド・モアブルの定理を用いて

$$= R^n\,\overline{(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

一方，zの大きさをr，偏角の主値をθと表すと，

$$z = r\,\{\cos(\theta + \underline{2k\pi}) + i\sin(\theta + \underline{2k\pi})\}$$

と表される．

重要　ただし k は整数．　重要

これらの大きさと偏角がそれぞれ等しいとおくと,

$$r = R^n \quad \Leftrightarrow \quad R = \sqrt[n]{r}$$

かつ,

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

k が, 1から 2, 3,... と次第に増加していくと,

$k=n$ となったときに,2項目が2πとなり, $k=0$と同じになる.

以降は k の増加に伴い周期的に同じ値が繰り返し現れる.

すなわち, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ のn個の異なる値を持つ.

arg z の主値に対応して,$k=0$での値を$\sqrt[n]{z}$の主値という.

n乗根の表式

以上より，一般に，複素数

$$z = r\,\{\cos(\theta+\underline{2k\pi}) + i\,\sin(\theta+\underline{2k\pi})\}$$

重要　重要

この項を忘れると
解が出てこない

のn乗根の表式は，

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right\}}$$

（ただし，$k = 0, 1, \ldots, n-1$）

n個の値を持つことに注意

(例)　1のn乗根 $\sqrt[n]{1}$ の表式:

$r = 1,\ \theta = 0$を代入して

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$(k = 0, 1, \ldots , n\text{-}1)$

n個あることを忘れない！

$n=2$, すなわち1の2乗根 $\sqrt[2]{1}$ の値:

$$\sqrt[2]{1} = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}$$

$$(\, k = 0,\, 1)$$

$$= \cos k\pi + i\,\underline{\sin k\pi}$$

常に　=0

$$= 1, -1 \quad (= \pm 1)$$

2つの値を表すものとする.

すなわち，本講義では，$\sqrt[2]{1} = \sqrt{1}$ ではなく，$\sqrt[2]{1} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

のように，2つの値の集合として扱う．一般に，複素数zの平方根については次ページ.

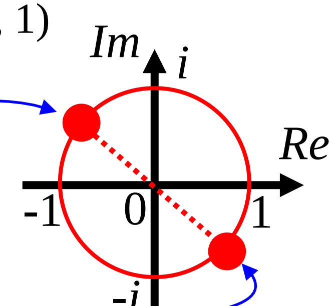
【参考】複素数の平方根に関する注意

- 実数の解析関数や演算記号は概ねそのまま形を変えずに複素数に拡張されているが，平方根を含むn乗根の表記については注意が必要
- 実数の平方根記号 $\sqrt{\ }$ (ルート) は、正負2つある平方根の値のうち，正の値を表すのに使われる.負の値は$-\sqrt{\ }$ と表す.
- 一方，一般に虚数を含む複素数には「正負」の概念がないので，2つの値を持つ平方根の表記を　$\pm\sqrt{\ }$　を使って表すことは一般にはできない.（たまたま虚部＝0の時は実数と等価，例えば，-1の2乗根(平方根)は$\pm i$だがこれを$\pm\sqrt{\ }$(-1)と書くこともあり，2つある複素数値が±で区別できるときは一見問題ないのだが，たとえば，虚部≠0の場合は，$\pm\sqrt{\ }$　で2つの複素数値を表現しようとすることは適切ではない．たとえば，$-i$ の2乗根を，定義式(あるいはド･モアブルの定理)から求めてみると，

$$
\begin{aligned}
\sqrt[2]{-i} &= \cos\left(\frac{3\pi/2+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi/2+2k\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right) \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}},\ \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}
$$

(ただし，$k = 0, 1$)

（値が2つあることに注意）



これら2つの値を, $\pm\sqrt{-i}$　の記号でそれぞれに対応させることには無理があろう.

> 虚部≠0の複素数のn乗根については，平方根(2乗根)も含めて，n個の値の集合を表すものとして扱う. (負数を含めた実数のn乗根の記法は実数の流儀に従う)

n=3, 4, 5の場合の具体例

１の3乗根, 4乗根, 5乗根

偏角の範囲を, $0 \leqq \theta < 2\pi$ としたときの主値で示す.

$$\sqrt[3]{1} = \underbrace{1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}_{3個}$$

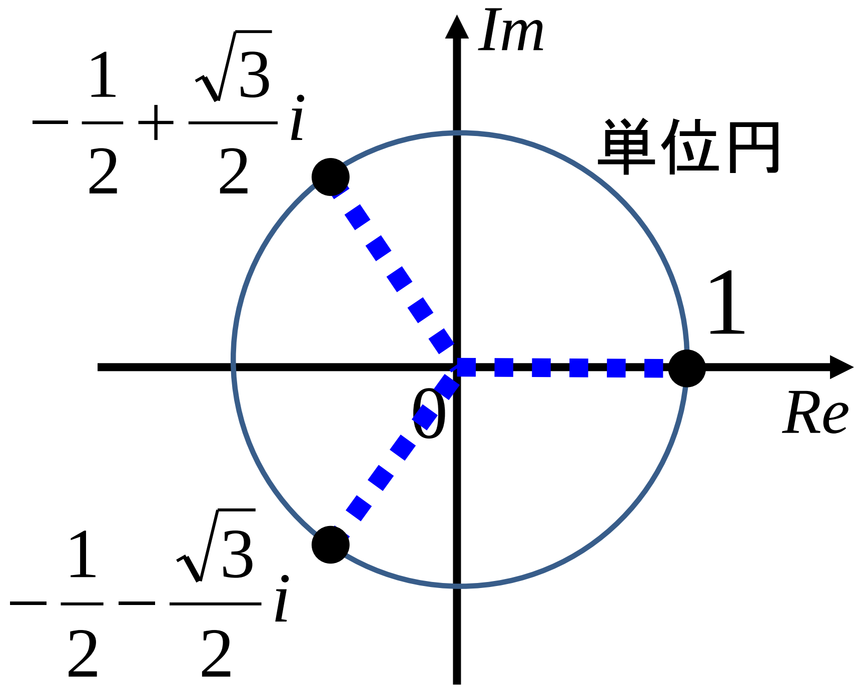
$$\sqrt[4]{1} = \underbrace{1,\ i,\ -1,\ -i}_{4個}$$

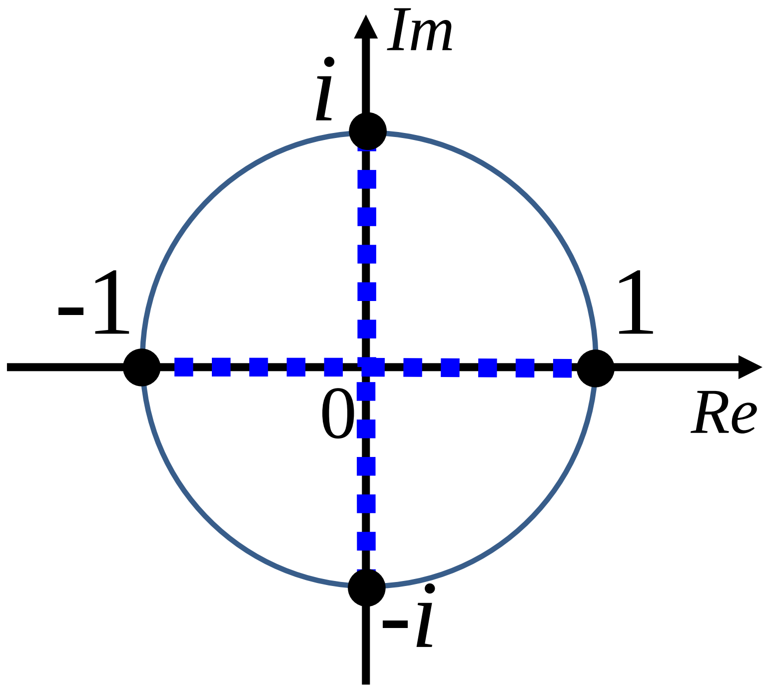
$$\sqrt[5]{1} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} \quad (k = \underbrace{0, 1, 2, 3, 4}_{5個})$$

きりのいい数字にならない場合は一般形で.

複素平面上の対応

$\sqrt[3]{1}$ $\sqrt[4]{1}$

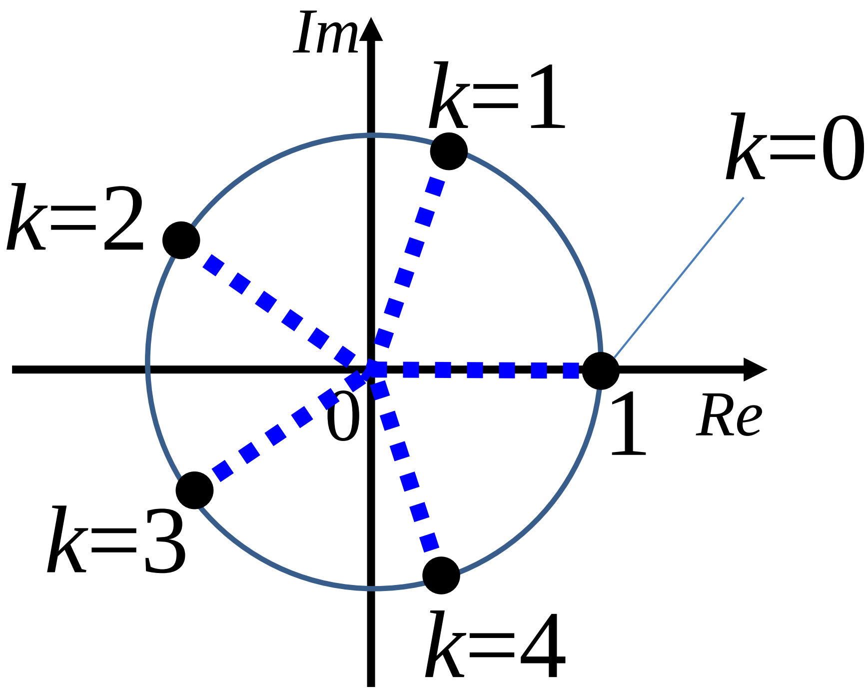




正三角形　　正方形

複素平面上の対応

$$\sqrt[5]{1} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$$



正五角形

例題2．2

$z^3 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ.
ただし,偏角の範囲を0≦θ<2πとする.

(解) $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと, ド・モアブルの定理より,

$$z^3 = r^3\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \qquad \cdots\cdots(1)$$

一方，$1-i$ を極形式で表すと,

$$i - 1 = \sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \underline{2n\pi}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} + \underline{2n\pi}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

重要　重要

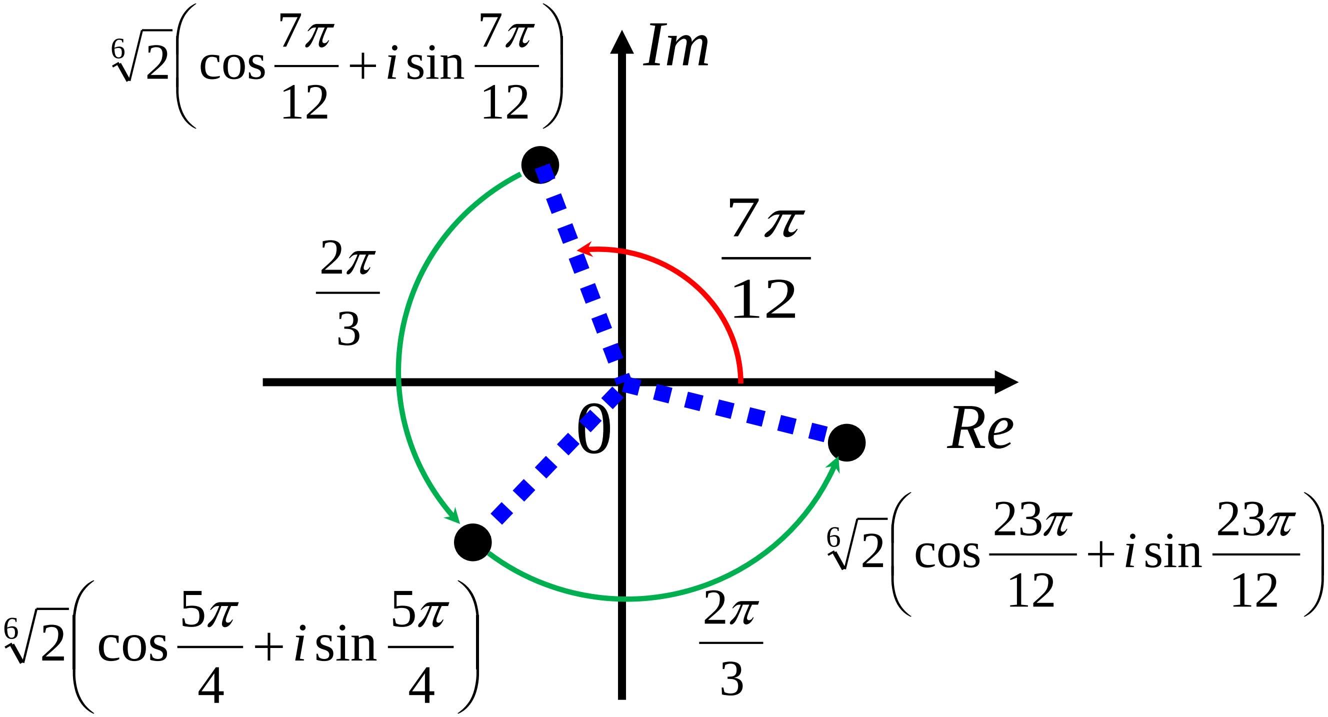
（1）＝（2）より，大きさと偏角をそれぞれ等しいとおくと,

$$\begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \iff r = \sqrt[6]{2} \\ 3\theta = \dfrac{7\pi}{4} + 2n\pi \iff \theta = \dfrac{7\pi}{12} + \dfrac{2n\pi}{3} \end{cases}$$

偏角の範囲を考慮して n=0,1,2を代入すれば求める3つの解を得る.

(次ページ)

3つの解を図示すると下図.



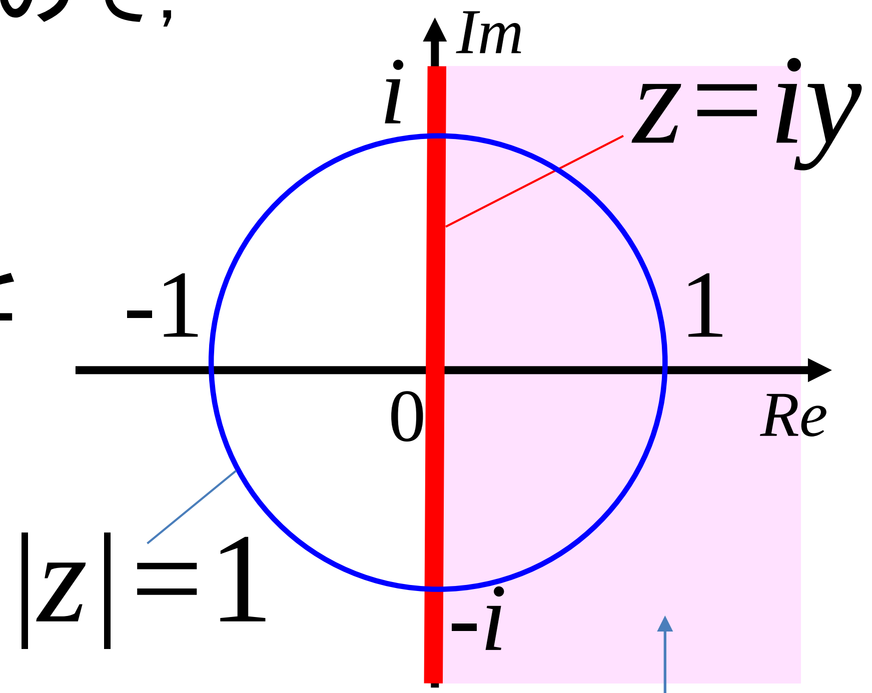
平面図形の表現

複素数 $z=x+iy$ は,(x,y)を指定すると複素平面上の点.

式 $z=iy$ は, zの実部=0 なので,
虚軸を表す.

式 $|z|=1$ は, 原点を中心と
する半径1の円.

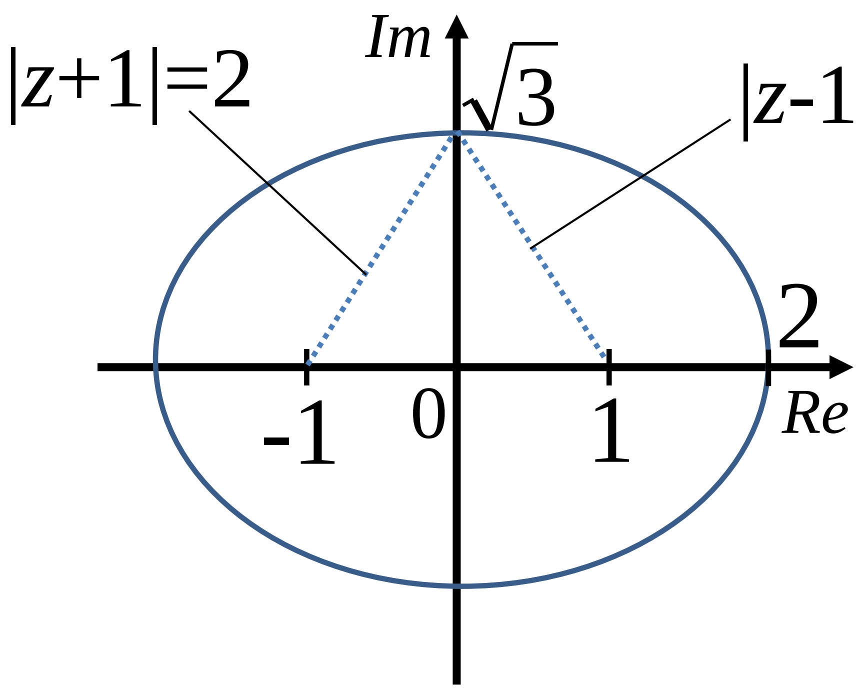
Re z > 0 は, 複素平面の
虚軸から右半面.



平面図形の表現

$$|z+1|+|z-1|=4$$

2つの焦点(-1,0),(1,0)からの長さの和が4である点の集合

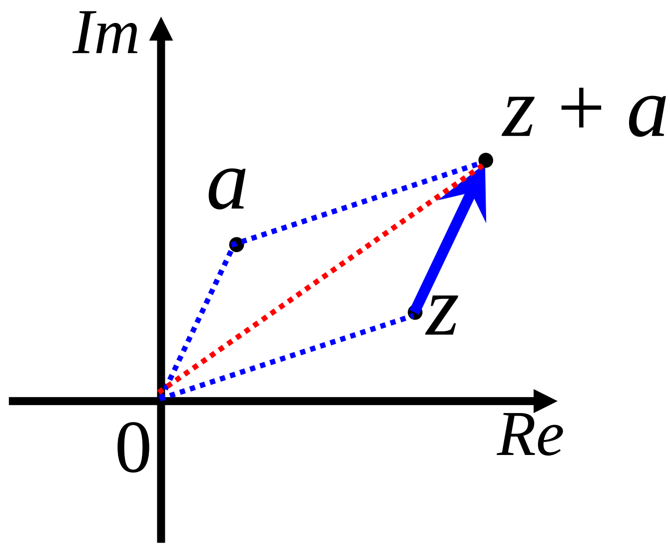


⇒楕円

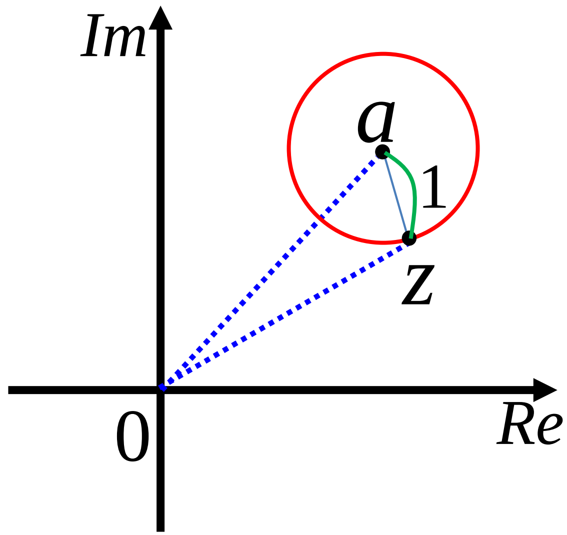
平行移動

複素数 z を a だけ平行移動する

$$\Rightarrow z + a$$



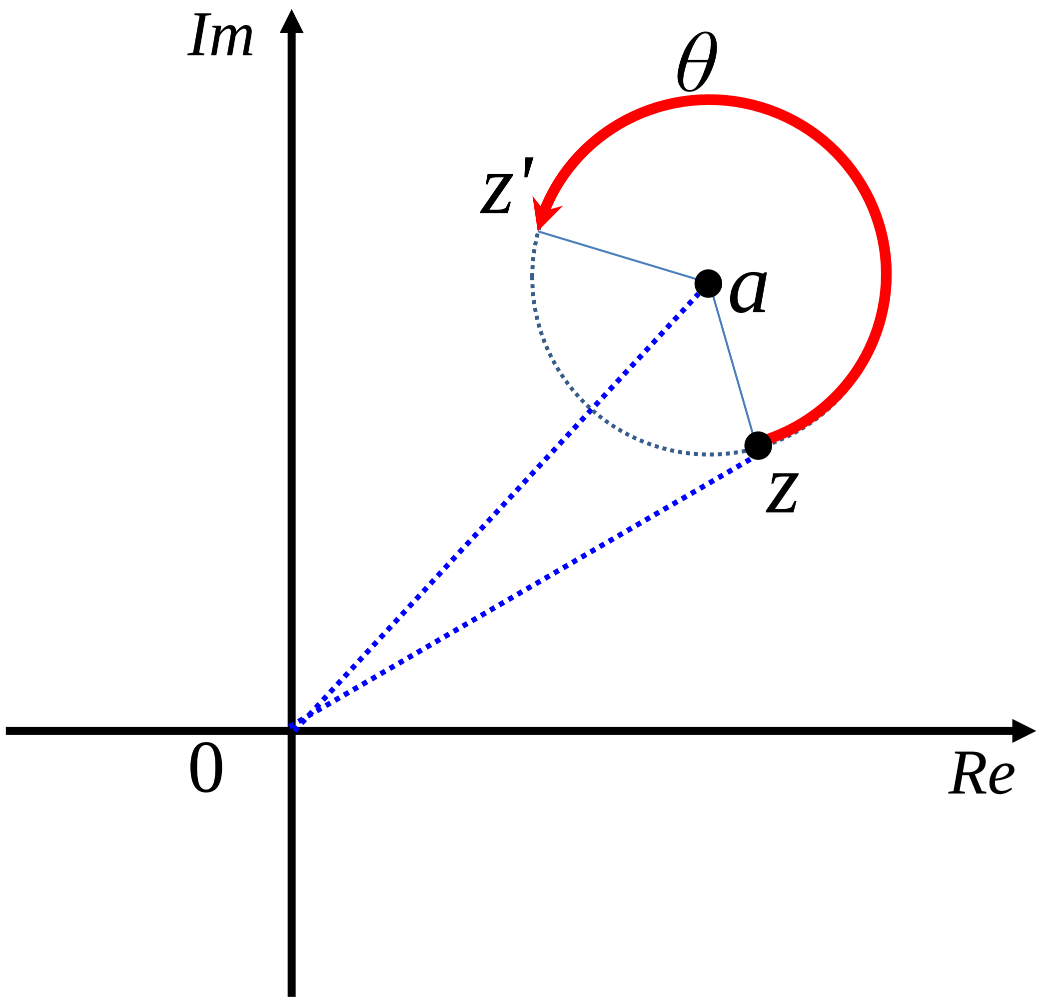
aを中心とする単位円



zとaの差の絶対値が1になる点の集合

$$\Rightarrow \ |z - a| = 1$$

複素数 z を、a を中心に角度θ回転させた複素数 z' を求める。



aを中心に角度θ回転

複素数 z を a を中心に角度θ回転させる

（１）z を $-a$ だけ平行移動させて、回転中心を原点に移動

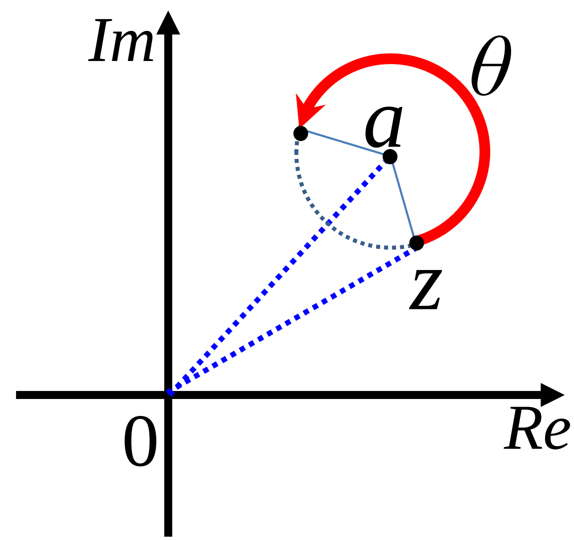
$$\Rightarrow z - a$$

（２）移動した点(z-a)を，原点を中心に角度θ回転させる

$$\Rightarrow (z-a)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

（３）最後に再び $+a$ だけ
平行移動して原点を
元に戻す.

$$\Rightarrow (z-a)(\cos\theta + i\sin\theta) + a$$



完了

例題2．３　次の関係式を満たす z を図示せよ.

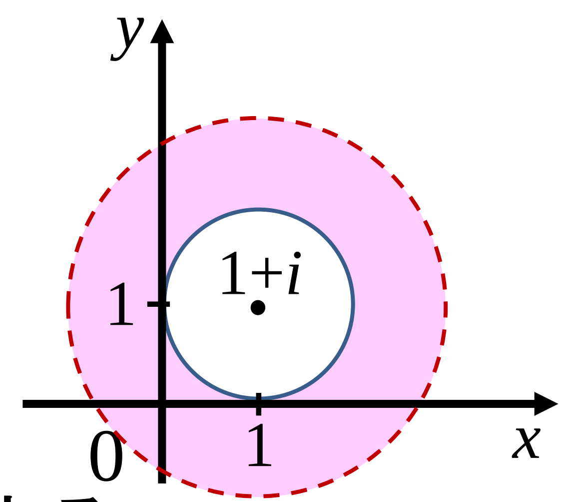
（1）　$1 \leqq |z-1-i| < 2$

(解)　まず, $1 = |z-1-i|$ は, $\Leftrightarrow 1 = |z-\underline{(1+i)}|$ より,

点(1,1)を中心とする半径1の円を表す.

$1 \leqq |z-1-i|$ は, その

外側(境界含む)の領域.



同様に, $|z-1-i| < 2$ は,

中心(1,1)で半径2の円の

内側(境界含まず)の領域を意味する.

よって, 右図の赤い領域が解.

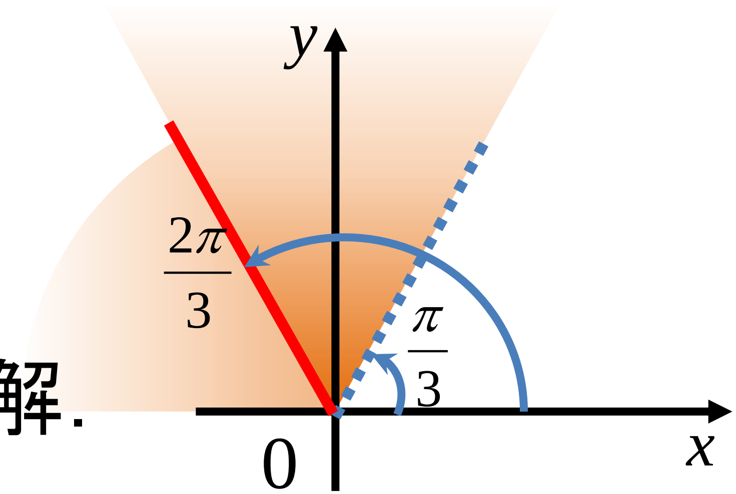
例題2．３　次の関係式を満たす z を図示せよ.

（２）　$\pi/3 < \theta \leqq 2\pi/3$

(解) まず, $\theta > \pi/3$ は,
原点から60°の線の左側.

また, $\theta \leqq 2\pi/3$ は, 原点から
120°の線(赤)の右側.

よって, 右図の茶色の領域が解.



確認事項

- 複素数の実部と虚部が求められる
- 複素数の和差積商を求められる
- 複素数を極形式で表すことができる
- 複素数の偏角を求めることができる
- 主値とは何か説明できる
- 複素数の加減乗除を複素平面上に表せる
- ド･モアブルの定理を示し，証明できる
- 複素数の n 乗根を求め複素平面上に図示できる
- 複素平面の範囲を数式で示すことができる
- 複素平面上の平行移動や回転を式で表すことができる