解析学演習　微分方程式(第 6 回)解答例

2020/04/27

1. [3 点] この問題は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書くことができる。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求める。永年方程式は $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=0$ より

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ となって固有値は $\lambda=3,-1$ となる [ここまで 1 点]。 $\lambda=3$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ から、例えば

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$、また $\lambda=-1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ から例えば

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる[2 個の固有ベクトルを求めて 1 点]。よって、この問題の一般解は

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。C_1, C_2 は任意定数。[正解が示せて 1 点]

2. [3 点]この問題は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と書くことができる。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値・固有ベクトルを求める。永年方程式は $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}=0$ より

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)+4=(\lambda+1)^2=0$ が得られて、固有値は $\lambda=-1$ と重解になる[ここまで 1 点]。これに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ より、例えば

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となって、1 つめの基本解としては $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をうるが、狭義の固

有ベクトルとして一次独立なものは１つしかない。そこで、2 つめの基本解をうるために広義固有ベクトルを求める。それには$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$を満たすものを 1 つ求めればよく、たとえば$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ を一つの広義固有ベクトルとして求めることができる[ここまで 1 点]。よって、第２の基本解として、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$をうる。

それゆえ、本問の一般解は$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2\left[te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right]$となる。$C_1$, C_2 は任意定数。[正解が示せて 1 点]

3. (1) [1 点] 判別式　$B^2-4AC=4^2-4\cdot1\cdot3=4>0$ より、双曲型である。

(2) [1 点]
$u=\exp(ax+by)$ とおいて、各偏微分係数を計算すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\exp(ax+by),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b\exp(ax+by),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=ab\exp(ax+by),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2\exp(ax+by)$$

となる。これらを与えられた偏微分方程式(3-1)に代入すると
$(a^2-4ab+3b^2)\exp(ax+by)=0$, 従って$(a^2-4ab+3b^2)=(a-b)(a-3b)=0$ を得る。これから $a=b,\ 3b$ の関係が満たされる時に、$u=\exp(ax+by)$ は問題文の式(3-1) の特殊解をあたえることが理解される。$a=b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(x+y)]$ で与えられ, $a=3b$ ならば、特殊解は $u=\exp[b(3x+y)]$ で与えられる。ここに、b はゼロでない定数、例えば 1。したがって、u の 1 次独立な 2 つの特殊解として

$u=\exp(x+y)$ と　$u=\exp(3x+y)$ を見出した。

(3) [1 点] 各項を(ξ,η) に関する偏微分で書きあらためるべく、変数として(x, y) から(ξ,η) への変換を行い、計算を進める。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=3\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

以上を(3-1)に代入すると

$-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$となる。すなわち$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$　(3-2) を得る。

(4) [1 点]

(3-2)をξで積分すると$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \Psi(\eta)$, ここに$\Psi(\eta)$は$\eta$の任意関数。さらにこれを$\eta$で積分すると$u = \int \Psi(\eta)\mathrm{d}\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$となる。ここで任意関数の積分もまた任意関数であり$\int \Psi(\eta)\mathrm{d}\eta = \psi(\eta)$とした。したがって$\varphi, \psi$をそれぞれ$c_1, c_2$と書き直せば

$u = c_1(\xi) + c_2(\eta) = c_1(3x + y) + c_2(x + y)$と(3-3)の一般解を得ることができた。ここに$c_1, c_2$は任意関数である。