

・提出用紙には、学籍番号と氏名を記載すること。

1. 以下の連立常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x + y$$

2. 以下の連立常微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x - 3y$$

3. 以下のような関数 $u = u(x, y)$ に対する偏微分方程式 (3-1) について考察する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3-1)$$

(1) 偏微分方程式(3-1) は、楕円型、放物型、双曲型のいずれに分類されるか、理由と共に述べよ。

(2) 式(3-1) において、 $u = \exp(ax + by)$ (ただし、 a と b は定数とする) とおいて代入することにより、 u の1次独立な特殊解を2つ見出せ。

(3) 式(3-1) において、 x, y の一次式として定義される2つの独立変数

$$\xi = 3x + y, \quad \eta = x + y$$

を新たに導入すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3-2)$$

となることを示せ。

(4) 偏微分方程式(3-2)の一般解を求めると、次式となることを示せ。

$$u = c_1(\xi) + c_2(\eta) = c_1(3x + y) + c_2(x + y) \quad (3-3)$$

ただし、 $c_1(\xi), c_2(\eta)$ は、それぞれ ξ, η の任意関数である。