13. 連立定係数1階線形方程式

目標

- 以下は前回実施済み
  - 未知関数の1つを消去する方法で解ける
  - 行列の対角化を利用した方法で解ける
  - 固有値・固有ベクトルを使用した方法で解ける

- 今回は、教科書を離れて、上記を固有値固有ベクトルを使ってn次元に拡張する

13.A 補足　固有値固有ベクトルを使ってn次元に拡張

- ここまでの議論では、連立といっても2元
- 実際の工業応用では、多数の未知関数が現れる。
  - また、線形代数を応用した解き方としても、13.2 - 13.3では不足。
- もっと一般的なn元の定係数連立線形常微分方程式の解法を理解する。

13.A1 準備

- 本節では、記号の取り方をここまでと少し変えて、t を独立変数として、未知関数を $x_1(t); x_2(t), \ldots, x_n(t)$ とする。
- $y = y(t)$ に対するn 階の常微分方程式が、

  $y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

と与えられているとする。

  – このとき　$y = x_1, y' = x_2, \ldots, y^{(n-1)} = x_n$ とおくと、

  $x_1' = x_2, x_2' = x_3, \ldots, x_{n-1}' = x_n,$

  $x_n' = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

連立の場合、1階微分のみ考えれば十分

- すなわち、高階微分方程式（系）は、未知関数を適当に増やすことによって、必ず1 階の微分方程式系に帰着されることとなる。
  - 以下、「連立」とはいわず、「方程式系」と記す。

- したがって、微分方程式系の一般論を検討する際、1階のみ考えれば良い。

- t を独立変数とし、未知関数を$x_1, x_2, \ldots, x_n$とする。

$$x_1' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x_2' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

とする。右辺が問題として与えられているとする。

- 次のような n次元ベクトル値関数$\boldsymbol{x}(t)$等を導入する。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{1n}(t) \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_{1n}(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

13A.2 線形1 階微分方程式系

- これらの導入により、1 階微分方程式系を以下のように書くことができる。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

- ここでは問題を**線形**に限る。
  - 線形とは、「$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が$\boldsymbol{x}$ について線形」ということ
  - 即ち　$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$
    - ここに、$\boldsymbol{A}(t)$はn 次の正方行列、また $\boldsymbol{b}(t)$はn 次の縦ベクトルで、各成分はtの関数である。

斉次と非斉次

- ここまでの議論と同様、$\boldsymbol{b}(t)=0$ の型の方程式系

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \qquad (13\mathrm{A}.1)$$

を、斉次方程式系、$\boldsymbol{b}(t)\neq 0$すなわち

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t) \qquad (13\mathrm{A}.2)$$

を非斉次方程式系という。

  – (13A.2)の解を$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$とし、その差を$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$とすると、$\boldsymbol{y}$は(13A.1)の解となっている。

初期条件

- したがって、**非斉次一般解＝斉次一般解＋非斉次特殊解**という今までの議論が同様に通用する。
- 初期条件として、 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$
- (13A.2)に対して、n 個の解$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が与えられているとすると、線形性から、その１次結合

  $$\boldsymbol{x}=C_1\boldsymbol{x}_1+C_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+C_n\boldsymbol{x}_n$$

  も(13A.2) の解
  - 以下の課題は初期条件を満たすように係数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を決定すること。

1次独立性

- 係数$C_1, C_2, \cdots, C_n$ の決定のためには、

$$C_1 \boldsymbol{x}_1(0) + C_2 \boldsymbol{x}_2(0) + \cdots + C_n \boldsymbol{x}_n(0) = \boldsymbol{x}_0$$

をn本の連立方程式とみなして解けば良い。

– 従って、$C_1, \cdots, C_n$が一意に求められるための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1(0) & \cdots & \boldsymbol{x}_n(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

– 1次独立な解をn個もとめねばならない

- 独立性は、ロンスキアンを求めれば検討できる。

1階線形系の場合のロンスキアン

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が、斉次微分方程式$\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$ の解であるとき、n次の正方行列 $\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$

の行列式 $|\boldsymbol{X}(t)| = \det(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n) = W(t)$ (13A.3)

をロンスキアンという。

- なお、常微分方程式系のロンスキアンに対して、$W'(t) = \mathrm{tr}\boldsymbol{A} \cdot W(t)$ が成立する。
  - 証明略, $\boldsymbol{W}(t)$は指数関数×定数の解を持つ。
  - 1点でゼロなら定義域全てでゼロ、1点でゼロでないなら決してゼロにならない。
  - 初期条件のみで$W(t)$がゼロか否かを判断できる。

ロンスキアンと1次独立性

- ある t において $W(t) \neq 0$ ならば、解として得られている $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は ${}^\forall t$ において一次独立

- 一次独立な n 個の解を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ とするとき、${}^\forall t = t_0$ における任意の初期条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たす解 $\boldsymbol{x}$ は、$C_1\boldsymbol{x}_1 + C_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + C_n\boldsymbol{x}_n$ と表される。

13A.3 非斉次方程式の特殊解の求め方

- 1 階線形非斉次微分方程式系の特殊解を求める方法であるLagrange の「定数変化法」について述べる。
- n次の1 階非斉次線形微分方程式系

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) \qquad (13A.4)$$

が与えられたとする。対応する斉次方程式系は

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \qquad (13A.5)$$

で、その1次独立な一般解を既知とし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots,$ $\boldsymbol{x}_n$とする。ここで、(13A.4)の特殊解を

Lagrangeの定数変化法

- $\boldsymbol{x}_\mathrm{p} = c_1(t)\boldsymbol{x}_1(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{x}_n(t) = \boldsymbol{X}(t)\ \boldsymbol{c}(t)$
  (13A.6)
  とおく。ただし、
  $\boldsymbol{X}(t) = (\boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2(t), \ldots, \boldsymbol{x}_n(t))$, $\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$
  である。
  - $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ は(13A.5)の解であるから、
    $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ でもある。このとき、(13A.6)を微分すると、
    $$\boldsymbol{x}_\mathrm{p}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{X}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{c}' \qquad (13\mathrm{A}.7)$$
    となる。

- 一方、$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$'について、(13A.4)の解であるから、$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{b}$ は明らかである。これが(13A.7)に等しいので

$$\boldsymbol{AXc} + \boldsymbol{Xc'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{b} \qquad (13A.8)$$

- さらに(13A.6)も参照すれば$\boldsymbol{Xc} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}$ であるから(13A.8)から

$$\boldsymbol{Xc'} = \boldsymbol{b}$$

- よって　$\boldsymbol{c'} = \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}$　　($\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{x}_i$ の1次独立性から正則)

- これからベクトル値関数$\boldsymbol{c}$は以下となる

$$\boldsymbol{c} = \int \boldsymbol{X}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t$$

- したがって　$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{X}(t)\cdot\int \boldsymbol{X}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t$

と特殊解が求められた。

- 式(13A.4)の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}(t)\cdot\int \boldsymbol{X}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{X}(t)\cdot\boldsymbol{C}$$

となる。ただし

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

である。

13A.4 定係数斉次線形常微分方程式系の基本解

- 次に斉次方程式の基本解をまとめる。
- ここでは、定係数に話を限る。

$$\boldsymbol{x}(t)' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \qquad (13\mathrm{A}.9)$$

$\boldsymbol{A}$は、tに依存しない。

- 解の形として

$$\boldsymbol{x} = \exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$$

ただし $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ 定数ベクトル

の形を仮定して(13A.9)に代入

– その結果

$$\boldsymbol{x}' = \lambda\exp(\lambda t)\,\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

- よって　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$

  となる。すなわち、λ が行列A の固有値ならば、

  $\exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$　は1つの解を与える。
- これを再度(13A.9)に代入すると

  $\boldsymbol{A}\exp(\lambda t)\boldsymbol{q} = \lambda \exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$　すなわち$\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q}$

  となるので、$\boldsymbol{q}$は固有値λに属する固有ベクトルとなる。
- すなわち、定係数斉次線形常微分方程式系の場合、係数行列A の固有値λ、固有ベクトル$\boldsymbol{q}$を求め、$\exp(\lambda t)\boldsymbol{q}$をうることが方針となる。

固有値・固有ベクトルの性質で場合分け

(1) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ が相異なる実固有値の場合

- この場合、それぞれの固有値に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は1次独立

- 基本解は

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\, \boldsymbol{q}_1,$$

$$\boldsymbol{x}_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\, \boldsymbol{q}_2,$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x}_n(t) = \exp(\lambda_n t)\, \boldsymbol{q}_n$$

(2) λ が複素固有値の場合

- $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$
- 対応する固有ベクトル$\boldsymbol{q}$が

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + i\boldsymbol{q}_2 \qquad (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in \mathbf{R}^n \text{ 実ベクトル})$$

であるとする。解は

$$\exp(\lambda t)\boldsymbol{q} = \exp(\alpha t)\,(\cos\beta t + i\sin\beta t)\,(\boldsymbol{q}_1 + i\boldsymbol{q}_2)$$

$$= \exp(\alpha t)\,(\boldsymbol{q}_1\cos\beta t - \boldsymbol{q}_2\sin\beta t)$$

$$+\, i\exp(\alpha t)\,(\boldsymbol{q}_1\sin\beta t + \boldsymbol{q}_2\cos\beta t)$$

と与えられる。実数の基本解は

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{R} = \exp(\alpha t)\,(\cos\beta t\cdot\boldsymbol{q}_1 - \sin\beta t\cdot\boldsymbol{q}_2)$$

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{I} = \exp(\alpha t)\,(\sin\beta t\cdot\boldsymbol{q}_1 + \cos\beta t\cdot\boldsymbol{q}_2)$$

(3) 固有値$\lambda(\in \mathbf{R})$が重解だが、対応する2つの1次独立な(狭義)固有ベクトル$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$がある場合

- 固有値が重解でも、以前の高階常微分方程式とは若干異なる場合である。

- すなわち、1次独立な固有ベクトルが重複度と同じく存在するような場合である。

$$\boldsymbol{x}_1 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1, \quad \boldsymbol{x}_2 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$$

は、1次独立な基本解を与える。

(4) 固有値 $\lambda(\in \mathbf{R})$ が重解で、狭義固有ベクトルが1つしかない場合

- この時、行列Aは対角化できない。
  - Jordanの標準形にまでは変形可能
- ユニタリー行列Pを用いて

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\lambda) \end{pmatrix}$$

  と変形される。
- $J(\lambda)$はJordanの標準形で

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (13A.10)$$

広義の固有ベクトル

- 係数行列Aが(13A.10)と変形される場合についてまとめる。ただし、 Aはr次の正方行列であるとする。
- 狭義の固有ベクトルはただ一つ、$\boldsymbol{q}_1$,
- 位数lの広義固有ベクトルを$\boldsymbol{q}_l$とする。
  - 広義固有ベクトルの性質から

$$(\boldsymbol{A}-\lambda)\,\boldsymbol{q}_1=0$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda)\,\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{q}_1$$

$$\vdots$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda)\,\boldsymbol{q}_r=\boldsymbol{q}_{r-1}$$

となる。

- 線形代数で学んだ通り、$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_r$ は一次独立
- まず、$\boldsymbol{x}_1 = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1$ は1つの基本解
- 次に、$\boldsymbol{x}_2 = t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$ は2つ目の基本解
  - なぜなら $\boldsymbol{x}_2' = \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \lambda t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \lambda \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_2$

    一方 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda t \exp(\lambda t)\, \boldsymbol{q}_1 + \exp(\lambda t)\, (\boldsymbol{q}_1 + \lambda \boldsymbol{q}_2)$

    よって $\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2$
- 以下同様に、

$$\boldsymbol{x}_r = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_1 + \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_2 + \cdots + e^{\lambda t} \boldsymbol{q}_r$$

- と、一次独立な解の組$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$が得られる。

15. 偏微分方程式

目標

- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 変数分離法で解ける
- 行列を用いて解ける

15.0 偏微分方程式の定義

- 偏微分方程式
  - 2つ以上の変数の未知関数と、その偏導関数および変数の間の関係式
- 階数
  - 含まれる最高階の偏導関数の階数
- 解
  - 偏微分方程式を恒等的に満たす関数
- 一般解
  - 偏微分方程式の階数に等しい個数の任意関数を含む解

15.0 続き

- 線形偏微分方程式
  - 未知関数とその偏導関数に関して1次式となっている偏微分方程式
- 非線形
  - 線形でない偏微分方程式
- 準線形
  - 最高階の偏導関数について1次式となっている非線形偏微分方程式
- 斉次
  - 未知関数とその偏導関数を含む項のみからなる場合

15.0 線形方程式の重ね合わせの原理

- 線形斉次偏微分方程式について、
  - 解の線形結合も、また、解となっている。

- 線形非斉次偏微分方程式の一般解
  - 線形斉次方程式の一般解に、
  - 非斉次方程式の解の一つを加えて得られる

例題 15.0.1

φとψを任意関数として、

$u = \varphi(x + 2y) + \psi(3x - y)$を一般解にもつ偏微分方程式を求めよ。

- 解　一般解が任意関数を2個含むことから、求めうる偏微分方程式が2階であることが解る。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'\left(x + 2y\right) + 3\psi'\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''\left(x + 2y\right) + 9\psi''\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\varphi''\left(x + 2y\right) - 3\psi''\left(3x - y\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\varphi''\left(x + 2y\right) + \psi''\left(3x - y\right)$$

例題 15.0.1 続き

- a, b, c を定数として $a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ =0 に代入する。
- $\varphi''(x+2y)$と$\psi''(3x-y)$の係数$a+2b+4c$, $9a-3b+c$ を共にゼロとおく。すると

$$a=-\frac{2}{3}c,\ b=-\frac{5}{3}c$$

- であるから、求めうる微分方程式は

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

15.1 偏微分方程式の分類

- 工学の諸問題で、よく登場するのは、2階の線形偏微分方程式である。
- その代表例
  - 楕円形 $(x^2 + y^2 = C)$
    - ラプラス方程式, $C = 0$
  - 放物形 $(y - x^2 = C)$
    - 拡散方程式, $C = 0$
  - 双曲形 $(y^2 - x^2 = C)$
    - 波動方程式, $C = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

- 形の名称は、導関数の階数に等しいべきの2次式が表す平面曲線に対応している。

- 2階偏微分斉次方程式は、以下で説明する変数分離法、または13.3節で説明した行列を用いて解くことができる。

参考までに...

- **Laplaceの方程式**

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

- **Poissonの方程式**

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f\left(x, y, z\right)$$

- **Helmholtzの方程式**

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k^2 u$$

上記は全て楕円型である

15.1 続き

- これらの方程式を、与えられた境界条件、初期条件のもとで解くことが問題となる。

- 線形ならば重ね合わせの原理が成り立つ。
  - 従って、境界条件を満たす関数の組みを直交多項式として求め、これらの重ね合わせ(級数)で表現することで、一般解を得ることができる。
    - フーリエ級数や、（境界が$x = \pm\infty$なら）フーリエ変換・ラプラス変換を学べば、上の説明の意味がわかってくるだろう。

15.2 変数分離法

- 双曲形を例として、位置x, 時刻tが満たす波動方程式
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (15.1)$$
を変数分離法で解く。ただし、Aは定数。
  - 右辺の係数が$1/A^2$としたのは、後の一般解を簡潔にするため。
- 2つの独立変数x, tの2階偏微分方程式の解$u(x, t)$を、xだけの関数$f_x(x)$と、tだけの関数$f_t(t)$の積と仮定し、$u = f_x f_t$とすると
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_t \frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f_x \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2}$$

変数分離

- となる。それぞれの式において、左辺の偏微分が右辺では常微分になっていることに留意されたい。
- これらを式(15.1)へ代入すると、

$$f_t \frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{A^2} f_x \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2}$$

になる。さらに両辺を $f_x f_t\,(=u)$ で割ると

$$\frac{1}{f_x}\frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{A^2}\frac{1}{f_t}\frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2} = -B^2$$ となる。

  - $-B^2$は分離定数と呼ばれる

分離定数

- 先の式で、左辺はxのみの関数、右辺はtだけの関数
- その式が任意のx, tで成り立つためには、その値がx, tによらない定数(分離定数)でなければならない。
  - 先の例では、一般解簡略化のため、分離定数 $= -B^2$とした。
  - この結果、次の2つの常微分方程式が得られた。

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_x}{\mathrm{d}x^2} = -B^2 f_x, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 f_t}{\mathrm{d}t^2} = -\left(AB\right)^2 f_t$$

変数分離により常微分方程式に変形

- これらの常微分方程式の一般解は、それぞれ以下となる。

$$f_x = C_{x1} \cos Bx + C_{x2} \sin Bx \qquad (15.2)$$

$$f_t = C_{t1} \cos ABx + C_{t2} \sin ABx \qquad (15.3)$$

- 変形された常微分方程式がそれぞれ2階のため、一般解(15.2)-(15.3)はそれぞれ2つの任意定数を含む。
  - (15.2)の2つの任意定数C_{x1}, C_{x2}は、xに関する2つの境界条件（あるいは初期条件）から定める。

- また、微分方程式(15.3)の2つの任意定数C_{t1}，C_{t2} についても、t に関する2つの初期条件(あるいは境界条件)から決定する。
- さらに、分離定数Bについても、境界条件・初期条件から決まるが、一般に1つとは限らない。
  - 定数Bが離散的にB_mのように決まる場合には、微分方程式(15.1)の一般解は

$$u=\sum_{m=1}^{\infty} f_{xm} f_{tm}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{x1m}\cos B_m x + C_{x2m}\sin B_m x\right)\left(C_{t1m}\cos AB_m t + C_{t2m}\sin AB_m t\right) \tag{15.4}$$

  - となる。

- また、定数Bが離散的に定まらず、連続値bになる場合は、以下となる。

$$u = \int_0^\infty f_x f_t \,\mathrm{d}b$$

$$= \int_0^\infty \left\{ c_{x1}(b)\cos bx + c_{x2}(b)\sin bx \right\} \left\{ c_{t1}(b)\cos Abt + C_{t2}(b)\sin Abt \right\} \mathrm{d}b$$

  - ここで、c_{x1}, c_{x2}, c_{t1}, c_{t2} はそれぞれbの関数となる。

例題15.1

(1) 波動方程式の一般解(15.4)に、$x = 0$ および$x = L$で $u = 0$となる境界条件を満たすようにB_mを求めよ。

(2) $t = 0$で $u = f(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = g\left(x\right)$ となる初期条件を満たす解を求めよ。

(解) (1) $x = 0$で $u = 0$となる境界条件を満足するには、任意の時間 t について、以下の式が成り立つ必要がある。

$$u\left(0,t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x1m}\left(C_{t1m}\cos AB_m t + C_{t2m}\sin AB_m t\right)$$

– よってすべてのmについて $C_{x1m} = 0$

例題15.1 つづき

- 次に、$x = L$ で $u = 0$となる境界条件を満足するには

$$u(L,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{x2m} \sin B_m L \left(C_{t1m} \cos AB_m t + C_{t2m} \sin AB_m t \right)$$

より、$\sin B_m L = 0$となる必要がある。すなわち、$B_m L = m\pi$より、

$$B_m = \frac{m\pi}{L}$$ となる。

(2) (1)の結果から

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{L} x \left(C_{t1m0} \cos A \frac{m\pi}{L} t + C_{t2m0} \sin A \frac{m\pi}{L} t \right)$$

– となる。なお、$C_{t1m0} = C_{x2m} C_{t1m}$, $C_{t2m0} = C_{x2m} C_{t2m}$とおいた。

例題15.1 さらにつづき

- $t=0$ で $u=f(x)$を満足するには、

$$f\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}C_{t1m0}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

でなければならない。

- 展開係数C_{t1m0}を求めるために、sin関数の直交性を利用する。
- すなわち上記の両辺に$\sin\frac{n\pi}{L}x$ をかけて $0\leq x\leq L$で積分すると、$m\neq n$の項はすべてゼロ、$m=n$の項のみ残り、となり、C_{t1n0}が定まった。

$$C_{t1n0}=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$

参考　sin関数同士の直交性

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\cos\left(\frac{m-n}{L}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right\}\mathrm{d}x$$

- $m \neq n$のとき、上記は

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{L}\pi x\right) - \frac{L}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right]_{x=0}^{x=L} = 0$$

- $m = n$のとき、上記は

$$= \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{L}\pi x\right)\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{1}{2}L$$

例題15.1 さらにつづき

- また、uの時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right)=\sum_{m=1}^{\infty}A\frac{m\pi}{L}\sin\frac{m\pi}{L}x\left(-C_{t1m0}\sin A\frac{m\pi}{L}t+C_{t2m0}\cos A\frac{m\pi}{L}t\right)$$

  - となっているので、$t=0$で $\frac{\partial u}{\partial t}=g\left(x\right)$ のためには

$$g\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}A\frac{m\pi}{L}C_{t2m0}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

  - でなければならない。
  - 先と同様に上記の両辺に $\sin\frac{n\pi}{L}x$ をかけて $0\leq x\leq L$で積分すると、

$$C_{t2n0}=\frac{2}{Am\pi}\int_{0}^{L}g\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\,\mathrm{d}x$$ となる。

- よって、初期条件を満足する解は

$$u(x,t)=\frac{2}{L}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi}{L}x$$

$$\left\{\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\right)\cos A\frac{m\pi}{L}t+\frac{L}{Am\pi}\left(\int_0^L g(x)\sin\frac{m\pi}{L}x\,\mathrm{d}x\right)\sin A\frac{m\pi}{L}t\right\}$$

- となる。

15.3 行列を用いて解く方法

注意：15.3は双曲型に限る！

- 微分方程式(15.1)を、13.3節で説明した行列を用いて解く。
- $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ とおく。
  - 微分方程式(15.1)は、これらを用いて $\dfrac{\partial u_x}{\partial x} = \dfrac{1}{A^2}\dfrac{\partial u_t}{\partial t}$ と表される。また、これらは、
    $\dfrac{\partial u_t}{\partial x} = \dfrac{\partial u_x}{\partial t}\left(= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)$ を満たす。
  - 2つの偏微分方程式は、以下のように行列を用いて

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} \qquad (15.5)$$

- と表される。ここで、 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{A^2}, \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix}$

である。

式(15.5)を例題13.2と同様に変形する。

- 行列$\boldsymbol{A}$の固有値は

$B_1 = -1/A, B_2 = 1/A,$

- それぞれに対応する固有ベクトルは

$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -A \end{bmatrix}, \ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ A \end{bmatrix}$ となる。

- よって変形に必要な正則行列$\boldsymbol{P}$は

$$\boldsymbol{P} = \left[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -A & A \end{bmatrix}$$ となる。

- ここで、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} A & -1 \\ A & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_t \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} Au_x - u_t \\ Au_x + u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

- とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}$$

- となる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Au_x - u_t\right) = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(Au_x - u_t\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Au_x + u_t\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(Au_x + u_t\right)$$

- と、独立した2つの1階偏微分方程式が得られる。
- これらの微分方程式を満たす関数は、それぞれ $x - At$ を引数とする関数w_1と、$x + At$ を引数とする関数w_2を用いて,

$$Au_x - u_t = w_1(x - At),\ \ Au_x + u_t = w_2(x + At)$$

と表せる。これらを連立すると、

ダランベールの解

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A} w_1\left(x - At\right) + \frac{1}{A} w_2\left(x + At\right)$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = w_1\left(x - At\right) + w_2\left(x + At\right)$$

- が得られる。w_1, w_2の原始関数をそれぞれ$w_{\mathrm{p}1}$, $w_{\mathrm{p}2}$とすると、

$$u = -\frac{1}{A} w_{p1}\left(x - At\right) + \frac{1}{A} w_{p2}\left(x + At\right)$$

- となり、引数を $x - At$と $x + At$ にする2つの任意関数の和で表される。
- この解を**ダランベールの解**という。

ダランベールの解に関する留意点

- 変数変換により、双曲型となる２階の偏微分方程式の場合、
- 一般解として、ダランベールの解が存在する

- 放物型や、楕円型では、形式的には存在しうるが、物理的に解釈が難しいことが多い。

- 引数 $x-At$ を t で微分すると、 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-A=0$
  から、 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A$

  – これより、関数w_{p1}は、速度Aで移動していると解釈できる。

    - 速度Aで、w_{p1}という任意の関数形が x 軸上を動くような、波動伝搬を表していると解釈できる。
    - 同様に、引数 $x+At$ の関数w_{p2}は、速度 $-A$で移動している、そのような波動伝搬を表していると解釈できる。

- 15.2節で変数分離法により求めた一般解(15.4)も、三角関数の積和公式を用いると

$$
\begin{aligned}
u = &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m}C_{t1m} + C_{x2m}C_{t2m}}{2} \cos\left\{B_m\left(x - At\right)\right\} \\
&+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x1m}C_{t1m} - C_{x2m}C_{t2m}}{2} \cos\left\{B_m\left(x + At\right)\right\} \\
&+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m}C_{t1m} - C_{x1m}C_{t2m}}{2} \sin\left\{B_m\left(x - At\right)\right\} \\
&+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{x2m}C_{t1m} + C_{x1m}C_{t2m}}{2} \sin\left\{B_m\left(x + At\right)\right\}
\end{aligned}
$$

- と、2つの引数 $x - At$ と、$x + At$ に関する関数の和で表される。

15章の補足：一般の2階線形偏微分方程式

- 一般に、2つの独立変数x, yに依存する関数$u = u(x, y)$ に対する2階の偏微分方程式は、

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

と書かれる。(ただし、$|A|+|B|+|C| \neq 0$)

  – $A, B, \ldots, G$ はxとyには依存し得るが、uには依存しない。

- **$B^2 - 4AC > 0$ — 双曲型**
- **$B^2 - 4AC = 0$ — 放物型**
- **$B^2 - 4AC < 0$ — 楕円型**

変数変換により、p.31の3種類のどれかに変形ができる

補足： 定数係数2階線形偏微分方程式の解法

- 例題　次の偏微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

なお、この方程式は双曲型である

- 解

u = exp(Ax + By)とおいて、与えられた方程式に代入すると

(A^2 + 3AB – 10B^2) exp(Ax + By) = 0,

– 即ち、(A – 2B)(A + 5B) = 0から, A = 2B またはA = –5Bが解を与える条件と考えられる。

– A = 2Bの時には exp[B(y + 2x)]　　が解

– A = –5Bの時には exp[B(y – 5x)]　が解

つづき

- 従って、Bを任意定数として$\exp[B(y + 2x)]$と$\exp[B(y - 5x)]$は解
  - さらにそれらの線型結合も解
    - Bに様々な値を与えての線型結合も解
  - これらの多様性から、φとψを任意関数として、結局は

$$u = \varphi(y + 2x) + \psi(y - 5x)$$

  - が一般解と予想される。
- 以下、この予想が正しいことを示す。

つづき

- $\xi = y + 2x$, $\eta = y - 5x$とおき、変数変換すべく偏微分係数を計算する。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} - 5\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 20\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 25\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

となるので、これらを与えられた方程式に代入する。

つづき

- この結果、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

- これをξで積分すると

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\Psi(\eta)$$

  – ただしΨは任意関数。さらにηで積分すると

$$u=\int\Psi(\eta)d\eta+\varphi(\xi)=\psi(\eta)+\varphi(\xi)$$

  – となる。
  – ここに、$\int\Psi(\eta)d\eta=\psi(\eta)$と取り直した。

- $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(y+2x)+\psi(y-5x)$と定義を代入すれば、予想が正しいことは明らか。

考察

- ちなみに、この偏微分方程式は、双曲型である。
- 従って、波動解が得られることは物理的にも妥当。

双曲型定数係数2階線形偏微分方程式のまとめ

- 双曲型の場合には、$u = \exp(Ax + By)$を代入し、定数AとBを決めて一般解を推察する。
  - 一般解であることの証明は、この方法を「公式」と考えることで、省略して良い。

- なお、x, yの線型結合について$(Ax + By)$が重解となるときは、一般解は$u = \varphi(Ax + By) + x \bullet \varphi(Ax + By)$ となる。(積分により証明可能)

以降は補足：時間が余れば講義します

放物型の場合

- 拡散方程式や、熱伝導方程式のような場合
  - t = 0における温度分布$u(x, 0)$を与えて、その時間発展$u(x, t)$を求めるような問題
  - 問題15.3のように、境界がxの有界な値にある場合
    - x = 0, πで常にゼロ、など
    - 問題15.2, 15.3のように、空間分布はフーリエ級数展開
  - 境界が無限遠点にある場合
    - 無限遠点でゼロ、など
    - フーリエ変換、あるいはガウス核を用いて表される
    - 「フーリエ変換・ラプラス変換」を習うと、理解できるであろう
- 基本的には、変数分離に持ちこむと解ける

放物型偏微分方程式の解法の例

- 物体の温度分布 $T(x, y, z, t)$
  - 熱伝導度 λ, 比熱 c, 密度 ρ とする
- 右の熱伝導の方程式に従う

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\nabla\left(\lambda\nabla T\right)$$

  - x 方向の1次元問題で、λ が定数なら

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ただし $a = \dfrac{\lambda}{c\rho}$:温度伝導度とした

- 上記について、２つの例を考えてみる

熱伝導問題1　有限境界　$\dfrac{\partial T}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

- 温度*T*に対する次の初期・境界値問題に対して：
  - $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$　　　　　$(t > 0)$,
  - $T(x, 0) = f(x)$　　　　　　　　$(0 \le x \le \pi)$
- の解は、*f*(*x*)のフーリエ・サイン展開

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

- を用いて、次となる。

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-an^2 t\right)\sin nx$$

- 境界がx = 0, πでなく、(−π/2), (π/2)なら、もちろんフーリエ余弦級数展開で表される

$$f\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos mx \qquad a_m=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}f\left(x\right)\cos mx\,\mathrm{d}x$$

- 一般の有限境界の場合も、平行移動・定数倍して正弦・余弦の組み合わせで表現可能
  - フーリエ級数の完全性関係
  - どのような関数でもフーリエ展開可能

$$f\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

展開係数を決めるのが、以降の課題となる

熱伝導問題２　無限境界

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(a = 1とした)

- 温度Tに対する次の初期・境界値問題に対して：
  - $\lim_{x \to \pm\infty} T(x,t) = 0$　　　($t > 0$),
  - $T(x,0) = f(x)$　　　($-\infty \le x \le \infty$)
- の解は、ガウス核 $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$
  - をもちいて、次となる。

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

  - フーリエ変換を習うと、理解できるであろう
    - その前に、複素解析が必要！

楕円型：Laplace方程式の場合

- Dirichlet境界値問題
  - 未知関数*u*(例えば電位など)について、
  - 調和関数 i.e. $\Delta u = \nabla^2 u = 0$
  - として微分方程式が与えられているとする
  - 考察している境界上
    - (たとえば単位円板$x^2 + y^2 = 1$))で
  - *u*の値が電位として与えられた場合に、
  - 考察空間の内部での*u*の分布を求めよ、など
  - 参考：Neumann境界値問題
    - *u*の値でなく法線方向勾配が与えられている場合
- 変数分離に持ち込むのが基本

Dirichlet境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \left(x^2 + y^2 < 1\right)$$

$$u\left(\cos\theta, \sin\theta\right) = f\left(\theta\right) \qquad \left(-\pi \le \theta < \pi\right)$$

- 以上の解は*f*(*θ*)のフーリエ級数展開

$$f\left(\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(in\theta\right) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta\right)\exp\left(-in\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

- を用いて $u\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} \exp\left(in\theta\right)$

Dirichlet境界値問題解のPoisson核による表記

- 以下のPoisson核

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \exp(in\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

- を用いると

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi) f(\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

上半平面の境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \left(-\infty<x<\infty,\ y>0\right)$$

$$u\left(x,0\right)=f\left(x\right),\ \ \lim_{y\to\infty}u\left(x,y\right)=0 \qquad \left(-\infty<x<\infty\right)$$

- 以上の問題の解は

$$u\left(x,y\right)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\xi\right)}{\left(x-\xi\right)^2+y^2}\mathrm{d}\xi$$

まとめ：本日の確認事項

- 未知関数が2つ以上の連立線形微分方程式を一般的に扱い解くことができる
- 固有値固有ベクトルを用いて連立微分方程式の解の構造を場合分けして対応できる
- 偏微分方程式の意味が理解できる
- 楕円形、放物形、双曲形の2階偏微分方程式の違いが理解できる
- 偏微分方程式を変数分離法で解ける
- 偏微分方程式を行列を用いて解ける
- 双曲型2階偏微分方程式のダランベールの解が理解できる