微分方程式

I. 一階微分方程式

微分方程式 Differential equation

基礎事項

- 微分方程式とは
- 階数
- 一般解と特殊解
- 境界条件と初期条件
- 積分法の復習
- べき級数展開の復習

今日のポイント:
微分方程式の種類を分類できる。変数分離形・同次形に積分を適用し解くことができる。

変数分離形

- 変数分離形、その解法
- $dy/dx = f(Ax + By + C)$ の形の解き方

同次形

- 同次形、その解法
- $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$ の形の解き方

1. 微分方程式の基礎事項

目標

- 微分方程式の階数の意味が理解できる
- 方程式の線形・非線形の違いが理解できる
- 方程式の斉次・非斉次の違いが理解できる
- 一般解・特殊解の違いが理解できる
- 初期条件・境界条件の意味が理解できる

1.1 微分方程式とは

n 回微分可能な独立変数 x の関数 $y = y(x)$と、その導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ の間に成り立つ関係式

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

を、yを未知関数とする**微分方程式**という。

もちろん、

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) \qquad \text{1階導関数}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) \qquad \text{2階} \quad 〃$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = y^{(n)}(x) \qquad n\text{階} \quad 〃$$

- この微分方程式を満足する関数 $y = y(x)$ を「微分方程式の解」という。
- 解を求めること、または解が満たす方程式を、導関数を含まずに表すことを「微分方程式を解く」という。

1.2 階数

order

微分方程式に含まれる導関数の最高階数を、その微分方程式の**階数**という。

例1 $y' = -y$ (1.1)

は1階微分方程式。

例2 $y'' = -y$ (1.2)

は2階微分方程式。

線形微分方程式

- 未知関数 y と、その導関数 $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ について、1次方程式となっている微分方程式を、n階**線形微分方程式**という。
  - xについては、その必要はない。

例1 $$y' + p(x)\,y = q(x)$$
は1階**線形**微分方程式。

例2 $$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x)$$
は2階**線形**微分方程式。

斉次微分方程式

- 前頁の2つの例で、右辺の関数が恒等的にゼロとなる微分方程式を斉次微分方程式（あるいは同次微分方程式）という。
- 右辺の関数が恒等的にはゼロでない微分方程式を非斉次微分方程式（あるいは非同次微分方程式）という。

例1 $$y' + p(x)\,y = 0$$

は斉次微分方程式。

Homogeneous differential equation

例2 $$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x) \neq 0$$

は非斉次微分方程式。

Non-homogeneous differential equation

非線形微分方程式

- 線形微分方程式でないものを非線形微分方程式という

Non-linear differential equation

例1 $y' + y^2 = 0$

はyの2次関数を含むので非線形微分方程式である。

例2 $y' + x^2 y = e^x$

は、yについて線形なので「線形微分方程式」である。(xは係数と考える。)

1.3 一般解と特殊解

- n階微分方程式の解は、n個の任意定数を含む。これを**一般解**という。

General solution

- 一般解のn個の任意定数に具体的な値を代入して得られる解を**特殊解**(または特解)という。

Particular solution

例1 $$y' = -y \tag{1.1}$$
の一般解は
$$y = C\exp(-x)$$
であり、1個の任意定数Cを含む。

たとえば、$C = 1$を代入して得られた解 $y = \exp(-x)$ は特殊解の例である。

例2 $$y'' = -y \tag{1.2}$$
の一般解は
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$
であり、2個の任意定数C_1, C_2を含む。

たとえば、$C_1 = 1, C_2 = 0$を代入して得られた解 $y = \cos x$ は特殊解の例である。

特異解

- 微分方程式の一般解の任意定数にどのような値を入れても得られない解を**特異解**という。
  - 特殊解とは違う概念。

Singular solution

例　$y'^2 = 4y$

の一般解は、$y = (x - C)^2$ である（ただしCは任意定数）。

一方、$y = 0$も、上記の微分方程式の解であるが、一般解のCにどのような値を代入しても$y = 0$とはならない。
この$y = 0$のような解を特異解という。

クレーローの微分方程式などで現れる(演習問題参照)。

1.4 初期条件と境界条件

- 独立変数 x の1つの値 X に対して、$(y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ の値を与える条件

$$\left(y(X), y'(X), y''(X), \ldots, y^{(n-1)}(X)\right) = \left(Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(n-1)}\right)$$

を、**初期条件**という。 Initial condition

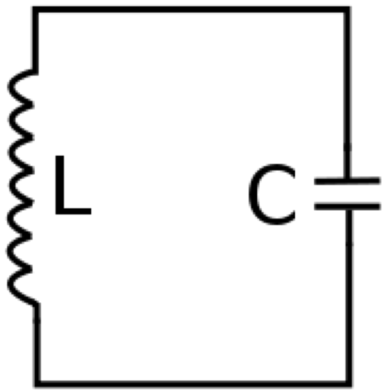
- その条件を満たす特殊解を求める問題を**初期値問題**という。

Initial value problem

初期値問題

- ***n*階**微分方程式の**一般解**は、***n*個**の任意定数 $C_1 - C_n$ を含んでいる。
  - $(y(X), y'(X), y''(X), \ldots, y^{(n-1)}(X))$ の値を $(Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(n-1)})$ と与えれば、未知量 n 個に対し方程式 n 本となり、よって任意定数が一意に決定できる.
  - 時間的変化を扱う問題に頻繁に登場する。

例： 時刻 $t = 0$ におけるコンデンサ(容量 C)両端の電圧と C に流れ込む電流を与えて、自己インダクタンス L のコイルとコンデンサの直列回路の電圧変化を求める、など。



境界条件

- 独立変数 x の複数の値 $X_1, X_2, \ldots, X_n$に対する(y, y', y'', …, $y^{(n)}$) の値を与える条件(式はn個)を境界条件という。

Boundary condition

  – たとえば、関数の値を与える場合

$$\left(y\left(X_1\right), y\left(X_2\right), y\left(X_3\right), \ldots, y\left(X_n\right)\right) = \left(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n\right)$$

  を与える。

  – その条件を満たす特殊解を求める問題を境界値問題という。

Boundary value problem

例題1.1　　1階微分方程式(1.1)を、$x=0$のとき $y=y(0)=1$の初期条件で解く

(解)　1階微分方程式(1.1)の一般解

$$y = C\exp(-x)$$

に初期条件を代入すると、

$$C = 1$$

となる。よって

$$y = \exp(-x)$$

がその初期条件での特殊解となる。■

例題1.2

2階微分方程式(1.2)を、$x = 0$のとき $y = y(0) = 1$ および $x = (\pi/2)$のとき $y = y(\pi/2) = 0$ の2つの境界条件で解く

(解)　2階微分方程式(1.2)の一般解

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

に2つの境界条件を代入する。

$x = 0$のとき $\sin x = 0$であるので、$C_1 = 1$となる。また $x = (\pi/2)$のとき $\cos x = 0$であるので$C_2 = 0$となる。

よって、$y = \cos x$ が与えられた境界条件での特殊解となる。

1.5 積分法の復習

- 微分方程式に対して、式の変形、微分法および積分法を有限回用いることによって解を求める方法を**求積法**という。

  quadrature

  – 残念ながら、一般に、1階常微分方程式でさえ、求積法で解が得られるとは限らない。

  – しかし、工学上の多くの問題で、1階常微分方程式に対し、積分操作が有効なことが多い。

- そこで、関数の積分を復習しよう。

置換積分

- uがxの関数であるとき、

$$\int f(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$$

Integration by substitution

部分積分

- 2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に関して

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Integration by parts

例題1.3　$\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ を求める。

（解）$x^2+1=u$とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2x$であるので

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\log_{\mathrm{e}}|u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\mathrm{e}}\left(x^2+1\right)+C$$

となる。ただしCは任意定数である。

原始関数 Primitive function

- 関数 f の原始関数とは、導関数が f となる関数をいう。
  - すなわち、f の原始関数を F とすると

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$$

  - あるいは

$$F = \int f\left(x\right)\mathrm{d}x + C$$

導関数　derivative

自然対数 Natural logarithm

- 関数 $(1/u)$の原始関数は、底をeとする対数関数、すなわち自然対数 $\log_e |u|$となる。
  - 今後、本講義に登場する対数関数は全て自然対数であるので、底のeは省略して$\log |u|$と記述する。
    - $\ln |u|$と記述することもある。
  - なお、対数関数の引数は正であるため、uに絶対値をつけておくことに注意。
    - uが負の場合も$\log |u|$を微分すれば$(1/u)$

Cf. 常用対数 common logarithm

例題1.4　$\int x\log x\mathrm{d}x$ を求める。

(解)

$$\int x\log x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2(\log x)'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\log x\boxed{-\frac{1}{4}x^2}+C$$

となる。ただしCは任意定数である。

1.6 関数のべき級数展開の復習

Power series

- べき(冪)級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ が $|x| < \rho$ の範囲(これを収束域という)で 収束するとき、ρ を収束半径という。

Radius of convergence

  – これを求める方法として以下の2つがある

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \frac{1}{\rho}$$

D'Alembert's ratio test

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n} = \frac{1}{\rho}$$

Cauchy's ratio test

  – 収束域では、項別微分、項別積分が可能である。

Termwise differentiation and integration

マクローリン展開 Maclaurin expansion

- 関数 $f(x)$ のマクローリン展開（または$x = 0$における テーラー展開）は次式で与えられる。

Taylor expansion

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

- これは、関数 $f(x)$ をべき級数展開したものであり、x^nの項の係数A_nは

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

で与えられる。

例題1.5　$\dfrac{1}{1+x}$ を$x=0$においてテーラー展開し、この収束域を求める。

(解)　$f(x)=\dfrac{1}{1+x}=(x+1)^{-1}$ とおく。

$f'(x)=-(x+1)^{-2}$, $f''(x)=2(x+1)^{-3}$,… となり、

$f^{(n)}(x)=n!(-1)^n(x+1)^{-(n+1)}$　が得られる。

従って　$f^{(n)}(0)=n!(-1)^n$ となり、テーラー展開は

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

となる。$A_n=(-1)^n$ より、　$\dfrac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\lim_{n\to\infty}|-1|=1$

となる。よって収束域は$|x|<1$となる。

2. 変数分離形

目標

- 変数分離形の意味が理解できる
- 変数分離形の解き方を理解できる
- 1階微分方程式の一般解には1つの任意定数が含まれることを理解している
- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(Ax + By + C)$の形が解ける

2.1 変数分離形とは

- 1階の導関数 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ がxだけの関数$f(x)$とyだけの関数$g(y)$の積の形で与えられた1階微分方程式を変数分離形という。

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(x\right)g\left(y\right) \qquad (2.1)$$

Variable separable

2.2 変数分離形の解き方

- $g(y) \neq 0$とし、式(2.1)の両辺を$g(y)$で割ると

$$\frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

となる。この両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$

- すなわち $$\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x + C \qquad (2.2)$$

となる。

変数分離 Separation of variables

- 式(2.2)の左辺はyだけの関数、右辺はxだけの関数
  - この操作を**変数分離**という
- 式(2.2)の両辺の積分を行えば、一般解が求められる。
  - なお、左辺と右辺を積分すれば、それぞれから任意定数 C_y と C_x がでてくるが、左辺の任意定数C_yを右辺へ移行すれば1つの任意定数$C\ (=C_x-C_y)$ にまとめることができる。

場合分けのもう一方　$g(y)=0$

- $g(y)=0$の場合は、1階微分方程式(2.1)が

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

となるので、その一般解は　$y=C$ (定数) となる。

- 式(2.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(2.2)は1つの任意定数C を含む。
  - $(C_x - C_y)$などと書かないように。これだと2つあるように見えてしまうが、実質は1つ。

例題2.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Ay \qquad (2.3)$$

を解く。ただし、Aは定数である。

(解)

$y \neq 0$として両辺をyで割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = A$

となる。この両辺をxで積分すると

$$\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int A\,\mathrm{d}x + C_0 \quad \text{すなわち} \quad \log|y| = Ax + C_0$$

ここに、C_0は任意定数である。変形すると

$$|y| = \exp(Ax + C_0) = \exp C_0 \exp(Ax)$$

すなわち $y = C\exp(Ax)$ (2.4)

なお、$C = \pm \exp C_0$とおいた。また、$y = 0$は式(2.4)で$C = 0$としたときの特殊解である。

以上まとめると、微分方程式(2.3)の一般解は$y = C\exp(Ax)$である。ただし、Cは任意定数である。

例題2.2 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \qquad (2.5)$ を解く。

(解) $y \neq 0$として両辺をyで割ると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x$

となる。この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x + C_0$ すなわち $\log|y| = \dfrac{1}{2}x^2 + C_0$

ここに、C_0は任意定数である。変形すると

$$|y| = \exp\left(\frac{1}{2}x^2 + C_0\right) = \exp C_0 \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

すなわち $y = C\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right) \qquad (2.6)$

なお、$C = \pm\ \exp\ C_0$とおいた。また、$y = 0$は式(2.6)で$C = 0$としたときの特殊解である。

以上まとめると、微分方程式(2.3)の一般解は $y = C\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$

である。ただし、Cは任意定数である。

例題2.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(y+1)$ を解く。

(解) $y\neq 0,-1$として両辺を$y(y+1)$で割ると $\dfrac{1}{y(y+1)}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$

となる。この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int\frac{1}{y(y+1)}\mathrm{d}y=x+C_0$ となる。ここに、C_0は任意定数である。

左辺の被積分関数は $\dfrac{1}{y(y+1)}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+1}$

と部分分数分解できるので $\displaystyle\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y-\int\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=x+C_0$

すなわち $\log|y|-\log|y+1|=x+C_0$, $\therefore\log\left|\dfrac{y}{y+1}\right|=x+C_0$

よって $\left|\dfrac{y}{y+1}\right|=\exp(x+C_0)=\exp C_0\exp x$

従って $\dfrac{y}{y+1}=C\exp x$ ただし$C=\pm\exp C_0$とおいた。

例題2.3 つづき

- さらに変形すると
$$y = \frac{C\exp x}{1 - C\exp x}$$
となる。
  - この式において、$C = 0$とおくと$y = 0$となる。
  - また、$C = \pm\infty$とおくと
$$y = \frac{\exp x}{\frac{1}{C} - \exp x} = -1$$
であるので、$y = -1$ となる。
  - それゆえ、先の一般解に$y = 0, -1$も含まれている。

- なお、$y = \ldots$の形にまでしなくとも、
$$\frac{y}{y+1} = C\exp x$$
のように、yの導関数を含まない方程式の形で解答としてよい。

2.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right)$ の形の解き方

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right) \tag{2.7}$$

の形で表される微分方程式は、以下の手順で変数分離形へ変形できる。

$$u = Ax + By + C$$

とおき、両辺をxで微分すると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = A + B\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

となる。

2.3 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax + By + C\right)$　つづき

これに式(2.7)を代入すると　$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = A + Bf\left(u\right)$
となる。

この式は以下のように変数分離形に変形できる。

$$\frac{1}{A + Bf\left(u\right)} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$$

例題2.4

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y + 1 \qquad (2.8)$$

を解く。

(解) $u = x + y + 1$とおき、両辺をxで微分すると $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

となる。これに式(2.8)を代入すると

$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1 = u$ すなわち $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + u$ となる。

$u \neq 1$のとき、両辺を$u + 1$で割ると $\dfrac{1}{u+1}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} =$ となる。この両辺をxで積分すると

$\displaystyle\int \frac{1}{u+1}\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x + C_0$ すなわち $\log|u + 1| = x + C_0$となる。

ここに、C_0は任意定数である。これより

$|u + 1| = \exp(x + C_0) = \exp C_0 \exp x, \ \therefore u + 1 = C \exp x$

ただし$C = \pm \exp C_0$とおいた。

例題2.4　　つづき

$u=-1$ は、この式において $C=0$ としたときの特殊解である。

$u=x+y+1$ を代入すると

$$\left(x+y+1\right)+1=x+y+2=C\exp x$$

$$\therefore \quad y=C\exp x-x-2$$

注意：uは自分で勝手においたものだから、
必ず最後は元に戻し，xとyで解答すること。

3. 同次形

目標

- 同次形の意味が理解できる
- 同次形の解き方が理解できる
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\right)$ の形が解ける

3.1 同次形とは

- 1階の導関数 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ が $\dfrac{y}{x}$ の関数 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ で

与えられた1階微分方程式を**同次形**という。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.1}$$

Homogeneous equation

3.2 同次形の解き方

$$\frac{y}{x} = u$$

すなわち $\boldsymbol{y = ux}$ とおく。

もちろん、uはxの関数, $u = u(x)$ である。よって

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

となることから、微分方程式(3.1)は

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f\left(u\right),\quad \text{すなわち} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f\left(u\right) - u}{x}$$

この式は、uを**未知関数とする変数分離形**である。

3.2 同次形の解き方(続き)

$\frac{1}{f\left(u\right)-u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$として、両辺を$x$で積分すると

$$\int\frac{1}{f\left(u\right)-u}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C \qquad (3.2)$$

となる。これに2.2 節の変数分離形の解法を適用すればuが求められる。それにxをかけることで微分方程式(3.1)の一般解yが求められる。

式(3.1)は1階微分方程式であるので、その一般解(3.2)は1つの任意定数 C を含む。

例題3.1　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+1 \qquad (3.3)$$ を解く。

(解)　$\dfrac{y}{x}=u$ とおき、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$を式(3.3)に代入する。$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+1$　すなわち　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$

両辺をxで積分すると　$\displaystyle\int \mathrm{d}u=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+C$

すなわち　$u=\log|x|+C$　となる。Cは任意定数である。

よって、微分方程式(3.3)の一般解yは

$$y=xu=x\log|x|+Cx$$

となる。

例題3.2　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$　を解く。

(解)　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)$　と変形でき、同次形である。

$\dfrac{y}{x}=u$ とおき、　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$を代入すると

$u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$　すなわち　$2x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{u^2+1}{u}$

すなわち　$\dfrac{2u}{u^2+1}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{x}$

となる。両辺をxで積分すると

例題3.2　続き

$$\int \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + C_0$$ 即ち

$\log\left(u^2+1\right) = -\log\left|x\right| + C_0$ となる。左辺の対数関数の引数$u^2 + 1$は常に正であるため、絶対値は不要。さらに変形すると

$$\log\left(u^2+1\right) = -\log\left|x\right| + \log\left\{\exp\left(C_0\right)\right\} = \log\frac{\exp\left(C_0\right)}{\left|x\right|}$$

よって $u^2+1 = \dfrac{C}{x}$ となる。ここに、$C\ (= \pm\ \exp C_0)$ は任意定数である。

例題3.2　さらに続き

$$\frac{y}{x} = u$$ を代入して整理すると

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{C}{x}$$ 即ち、一般解は

$$y^2 = -x^2 + Cx$$

となる。

注意：*u*は自分で勝手においたものだから、必ず最後は元に戻し, *x*と*y*で解答すること。

3.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$ の形の解き方

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{Ax + By}{Dx + Ey}\right) \tag{3.4}$$

の形の微分方程式は、引数の分子、分母をそれぞれxで割ると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{A + B\dfrac{y}{x}}{D + E\dfrac{y}{x}}\right)$$

のように、同次形とみなすことができる。

3.3　　つづき

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\right) \qquad (3.4)$$

の形の微分方程式は、$\boldsymbol{AE-DB\neq 0}$ならば、引数の分子$Ax+By+C$と、分母 $Dx+Ey+F$ が同時に0となる$x=X, y=Y$を用いて

$$x_0=x-X$$
$$y_0=y-Y$$

の変数変換を行うと、

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}=f\left(\frac{Ax_0+By_0}{Dx_0+Ey_0}\right)$$

と、式(3.4)の形に変形できる。

3.3 テキストの補足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}\right)$$

の形の微分方程式で、$\boldsymbol{AE - DB = 0}$の場合には、前頁のようなX, Yは存在しない。

その場合は、**2.3の方法**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(Ax+By+C\right)$$

の形と考えれば解くことが可能である。

演習：上記の理由を説明せよ。

例題3.3 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y-1}{x+y-3}$ (3.5) を解く。

(解) 右辺の分子$x-y-1$と分母$x+y-3$ が同時に0となるのは、$x=2, y=1$である。そこで

$$x_0=x-2$$
$$y_0=y-1$$

の変数変換を行うと、式(3.5)は

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}=\frac{x_0-y_0}{x_0+y_0}$$

となる。右辺の分子、分母をそれぞれx_0で割ると

$$\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0}=\frac{1-\dfrac{y_0}{x_0}}{1+\dfrac{y_0}{x_0}}$$

と同次形となる。

例題3.3

つづき

$\dfrac{y_0}{x_0} = u$ とおき、$\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x_0} = u + x_0 \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_0}$を代入すると

$$u + x_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_0} = \frac{1-u}{1+u},$$

よって

$$x_0 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_0} = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-2u-u^2}{1+u}$$

すなわち

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_0} = -\frac{1}{x_0}$$

と変数分離形となる。

両辺をx_0で積分すると

例題3.3　　さらにつづき

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,\mathrm{d}u = -\int \frac{1}{x_0}\,\mathrm{d}x_0 + C_0$$

となる。ここでC_0は任意定数である。左辺において分母u^2+2u-1の微分が$2u+2$と分子の2倍となることに留意して

$$\frac{1}{2}\log\left|u^2+2u-1\right| = -\log\left|x_0\right| + C_0$$ 即ち

$$\log\left|u^2+2u-1\right| = -2\log\left|x_0\right| + 2C_0 = \log\frac{1}{x_0^2} + \log\left\{\exp\left(2C_0\right)\right\}$$

$$= \log\frac{\exp\left(2C_0\right)}{x_0^2}$$

例題3.3　　　　さらにつづき

$$\therefore u^2 + 2u - 1 = \frac{C_{00}}{x_0^2}$$ となる。ここで$C_{00} = \pm \exp(2C_0)$とした。

$u = \dfrac{y_0}{x_0}$ を代入すると $$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 + 2\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - 1 = \frac{C_{00}}{x_0^2}$$

$$\therefore \quad y_0^2 + 2x_0y_0 - x_0^2 = C_{00}$$ となる。

$x_0 = x-2,\ y_0 = y-1$ の変数変換を元に戻すと

$$(y-1)^2 + 2(x-2)(y-1) - (x-2)^2 = C_{00}$$ 即ち

$$-x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y + 1 = C_{00}$$

$$\therefore \quad -x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 6y = C$$ となる。

ただし$C = C_{00} - 1$とおいた。

展開問題3.1 (9)について、補足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x+y}{x+2y}$$ もちろん、同次形

- ただし、分数の計算などが煩雑。もう少し簡略に計算できないか？
  – 本問はテキスト最終近くの14章、**完全微分形**にもなっている。移項し変形すると

$$\left(2x+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+2y\right)\mathrm{d}y=0$$

完全微分形の場合、積の微分の公式を逆に使えば

3.1(9)補足 つづき

$$\mathrm{d}(x^2 + xy + y^2) = 0 \qquad (*)$$

となっている。

Differential form
微分形式　$\mathrm{d}(\ldots) = 0$とは、d(　)の中身が変化しない、すなわち、定数ということ。

従って、式(*)から直ちに、

$$x^2 + xy + y^2 = C$$

を一般解として求めることができる。

積の微分の公式

- $(yz)' = y'z + yz'$
  - $\mathrm{d}(yz) = z\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z$
  - Etc.

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\left(y^2\right) = 2y\mathrm{d}y$$

- 高校以来、左から右への変形におなじみと思うが、**これを逆に使う発想**が、線形の方程式や積分因子法などで活きてくる。
  - 様々な微分方程式を学べば、その使い道が、わかってくるだろう。

例題3.3補足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y-1}{x+y-3}$

(3.5) を、完全微分形と考えて解く。

(解)　変形して整理すると

$$\left(-x+y+1\right)\mathrm{d}x+\left(x+y-3\right)\mathrm{d}y=0$$

これは**完全微分形**である。よって次のように変形できる

$$\mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+x-3y\right)=0$$

これから明らかに　$-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+x-3y=C_1$

両辺2倍して$2C_1=C$とすれば

$$-x^2+2xy+y^2+2x-6y=C$$

まとめ：本日の確認事項

- 微分方程式の階数の意味が理解できる
- 方程式の線形・非線形の違いが理解できる
- 方程式の斉次・非斉次の違いが理解できる
- 一般解・特殊解の違いが理解できる
- 初期条件・境界条件の意味が理解できる
- 変数分離形の意味が理解できる
- 変数分離形の解き方を理解できる
- 1階微分方程式の一般解には1つの任意定数が含まれることを理解している
- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(Ax + By + C)$の形が解ける

つづき

- 同次形の意味が理解できる
- 同次形の解き方が理解できる
- $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}\right)$$ の形が解ける