

## 解析学 理解度の確認 (4)

答案用紙に学籍番号, 氏名, 問題番号を明記. 計算過程の記述を重視します.  
大問1題につき1枚の解答用紙を使用のこと.

### 問題1.

- (1) コーシーの積分定理を述べよ. (証明は必要ないが, 証明にまで言及があれば加点対象とする.)
- (2) 複素平面上の点  $z_0$  を中心とする半径  $r$  の円を積分路  $C: |z-z_0|=r (r>0)$  とするとき, 積分路  $C$  を, 媒介変数を用いて式で示せ.
- (3) 閉曲線  $C$  とその内部を含む領域で関数  $f(z)$  が正則であるとき, (2)の積分路  $C$  で  $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$  を計算し, 最後に  $r \rightarrow 0$  とすることで, その値を  $z_0, f(z)$  等を用いて式で示せ. (定理・公式を使って求めるのではなく, (2)の積分路で線積分を実際に行うことにより求めてください. 計算過程を重視します.)

### 問題2.

- (1) 関数  $f(z) = \bar{z}$  を, 点  $0$  から点  $2+i$  まで下に示す積分路に沿って複素積分せよ.
  - (a) 積分路  $C_a$ : 点  $0$  と点  $2+i$  を結ぶ線分
  - (b) 積分路  $C_b$ : 放物線  $y^2=x/2$  の点  $0$  から  $2+i$  まで(ヒント:  $y=t$  とおく)
- (2)  $f(z) = \frac{1}{z}$  を, 中心  $z=-1$  でテーラー展開し, 続いて収束半径を求めよ.
- (3)  $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$  を,  $z=-1$  を中心として, 次の範囲でべき級数展開せよ.
  - (a)  $|z+1| < 2$
  - (b)  $|z+1| > 2$
- (4) べき級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2n+1} z^n$  の収束半径を求めよ.

→次ページに 問題3

問題 3. (どのように解いてもかまいませんが計算過程を示してください)

(1) 積分路  $C$  が、原点を中心とする単位円するとき、積分  $\int_C \frac{z+3}{2z^2-3z-2} dz$  を計算せよ.

(2) 積分路  $C$  が、中心  $z=0$ , 半径 2 の円するとき、積分  $\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$  を計算せよ.

(3) 積分  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5+3 \cos \theta} d\theta$  を計算せよ.

(4) 積分  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$  を計算せよ.

【参考】

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \right\}$$

$$f(z)=h(z)/g(z), \{g(z_0)=0, g'(z_0) \neq 0\} : \operatorname{Res}(f, z_0)=h(z_0)/g'(z_0)$$