

- ・提出用紙には、学籍番号と氏名を記載すること。

1. 次の微分方程式を解くことを考える。

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad (1-1)$$

(1-1)式を Bessel の微分方程式の一種と考えて解くこととする。一般に、Bessel の微分方程式は

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1-2)$$

と表され、その基本解は、 $n$  が整数でない場合には以下の2つとなる。

$$y = J_n(x), J_{-n}(x) \quad (1-3)$$

ただし  $J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ , これを  $m$  次のベッセル関数という。 (1-4)

なお(1-4)の  $\Gamma$  はガンマ関数である。

(1) ベッセル関数  $J$  を用いて、(1-1)の一般解を書け。

(2) (1-1)を変形して、わかりやすい形に書き換えることを試みる。(1-1)で、 $y = x^{-1/2} u(x)$  とおき、 $u(x)$ の満たす微分方程式を示せ。

(3) (2)の微分方程式を解き、 $u(x)$ の一般解を求め、さらに  $y(x)$ の一般解を求めよ。

2. 一次元の位置  $z$ , 時刻  $t$  の関数として、電界ベクトルの  $x$  成分  $E_x = E_x(z, t)$  が以下のように与えられているとする。

$$E_x = g_x(z - ct) + h_x(z + ct) \quad (2-1)$$

ただし、 $c$  は光速、 $g_x, h_x$  は任意関数とする。式(2-1)の電界強度は波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (2-2)$$

を満たしていることを示せ。