微分方程式　補足

補足１～確定特異点のある場合の級数解～BESSELの微分方程式とBESSEL関数

原点が確定特異点となる2階線形微分方程式の例—Bessel関数

- Besselの微分方程式

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-\alpha^2\right)y=0$$

- その解 = Bessel関数

$$J_\alpha\left(x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^m}{m!\,\Gamma\left(m+\alpha+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

  - 上記を第1種Bessel関数という
  - αが整数でなければ、J_αと$J_{-\alpha}$が2つの基本解
  - αが整数nなら, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$だから, 第2基本解は$J_{-n}$では不可
  - この時の第2基本解は、第2種Bessel関数$Y_n(x)$

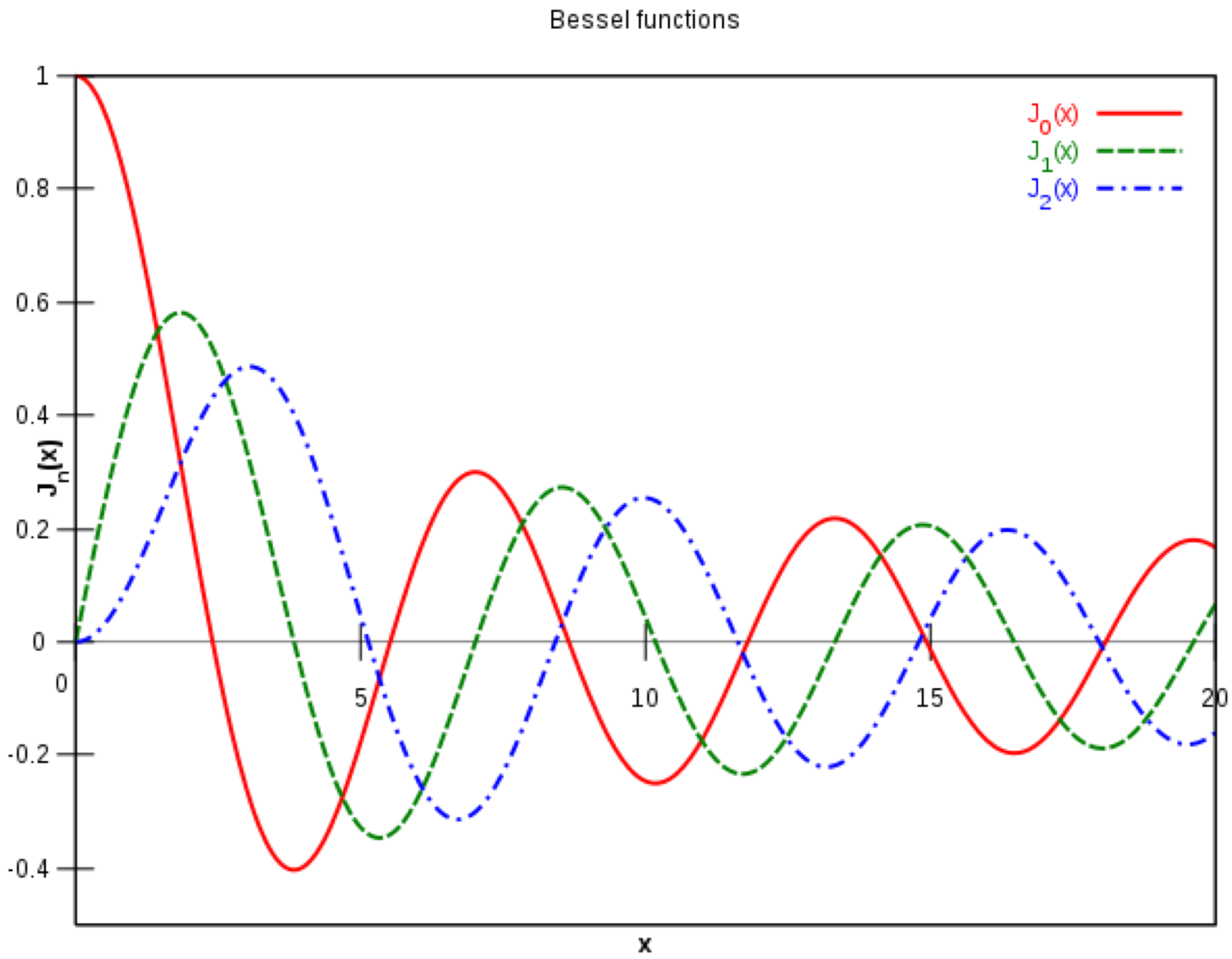
$$Y_\alpha\left(x\right)=\frac{J_\alpha\left(x\right)\cos\left(\alpha\pi\right)-J_{-\alpha}\left(x\right)}{\sin\left(\alpha\pi\right)}$$

第２種Bessel関数

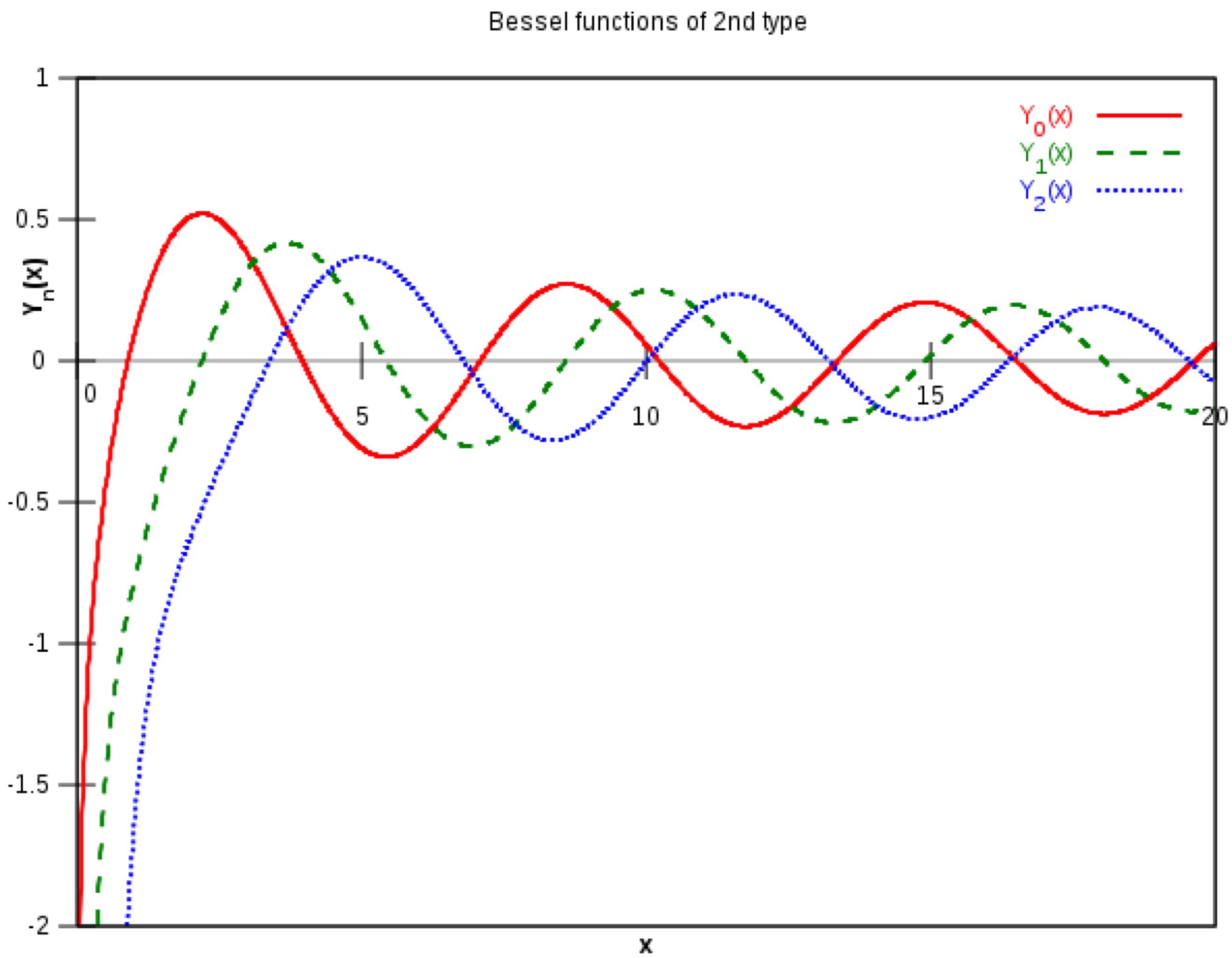
$$Y_l(x) = J_l(x)\ln|x| - \sum_{n=0}^{l-1}\frac{(l-n-1)!}{2(n!)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-l} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(n!)(l+n)!}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{l+k}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l}$$

- 詳細を記憶する必要はないが、第１項が $J_l(x)\bullet\ln|x|$ であることに注目されたい

第1種Bessel関数



第2種Bessel関数



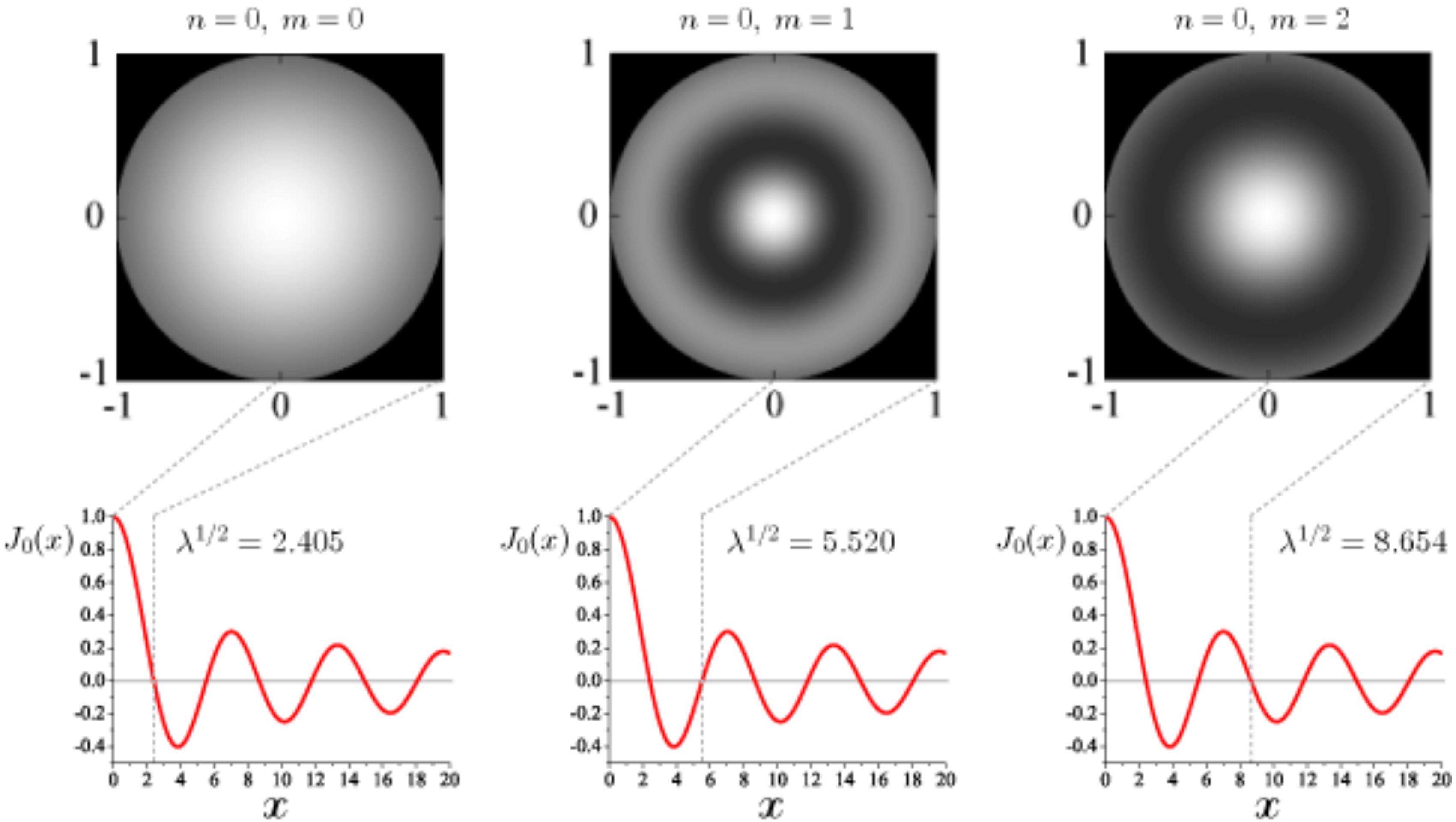
第1種Bessel関数

- Helmholtz方程式　$\Delta f + k^2 f = 0$ で、**軸対称**(fがθによらない), かつr, zについて変数分離できるとすると、
- r方向に対して0次のBesselの微分方程式が得られる。
  - (演習)上記を試みてみよ

工学における第１種Bessel関数

- 円柱座標系でのHelmholtz方程式の解
  - 軸対称系の導波管内部の電磁界
  - 円柱状の物体の温度分布～熱伝導方程式の解
  - 円柱形状の原子炉の中性子束分布
- 位相変調を施した電磁波のフーリエ級数展開の展開係数
- 電気電子、情報通信、機械工学、原子核工学、建築土木、etc., 理工系では必須
- いずれまた、何かの講義にて。

太鼓の膜の*r*方向振動パターン



http://www.natural-science.or.jp/article/20101108184753.php

通信工学で現れる位相変調信号計算に現れる公式

$$\cos\left(m\cos\theta\right) = J_0\left(m\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n J_{2n}\left(m\right)\cos 2n\theta$$

$$\sin\left(m\cos\theta\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1} J_{2n-1}\left(m\right)\cos\left(2n-1\right)\theta$$

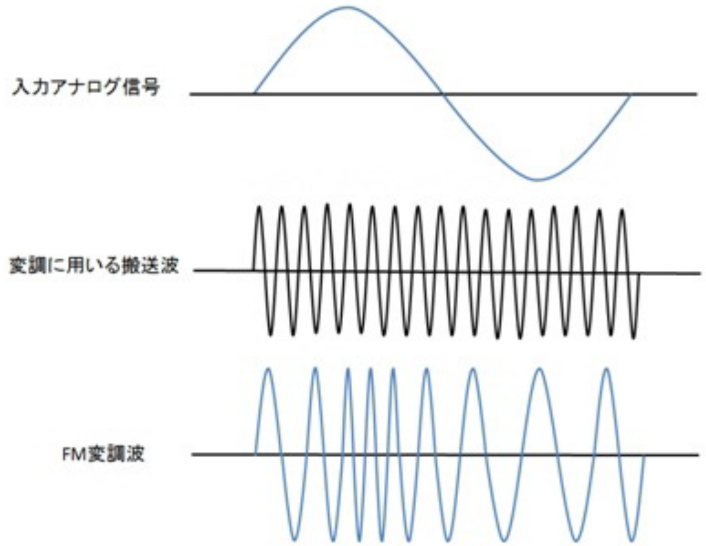
$$\cos\left(m\sin\theta\right) = J_0\left(m\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}\left(m\right)\cos 2n\theta$$

$$\sin\left(m\sin\theta\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}\left(m\right)\cos\left(2n-1\right)\theta$$

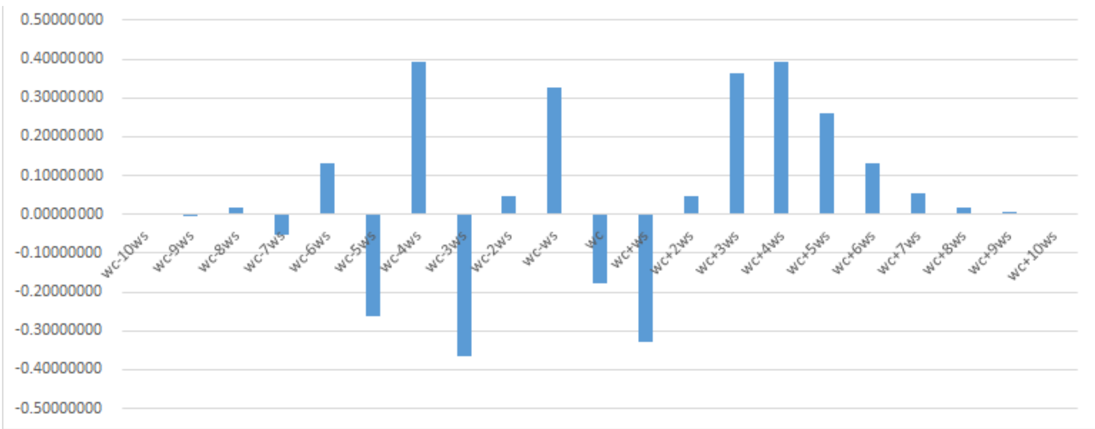
位相変調信号

$$f(t) = A\cos\left(\omega_c t + m\cos pt\right)$$

$$= A\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m)\cos\left[\left(\omega_c + np\right)t + \frac{n\pi}{2}\right]$$



- 2Qで行うフーリエ変換を習うと、横軸を周波数に変換可能
  - 周波数ごとのピーク値をベッセル関数で表せる
  - 詳細は2Qに



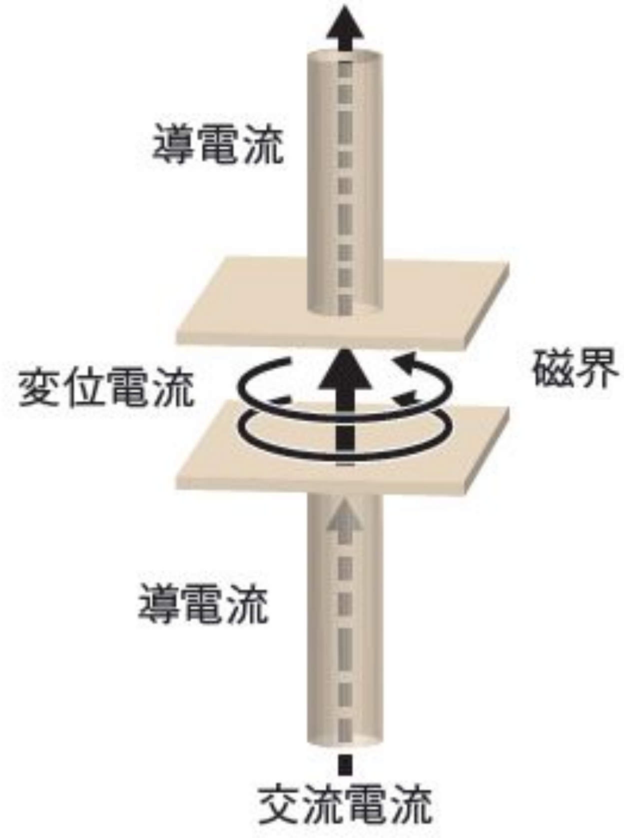
補足２
偏微分方程式の工学応用の例
～電磁波

電磁波

- 電磁波の伝搬は、波動方程式で表されることを示す。
- Ampèreの法則（のMaxwellによる拡張）

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

H 磁界、***j*** 電流、***D*** 電束密度,
上の第２項は変位電流を表す



$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

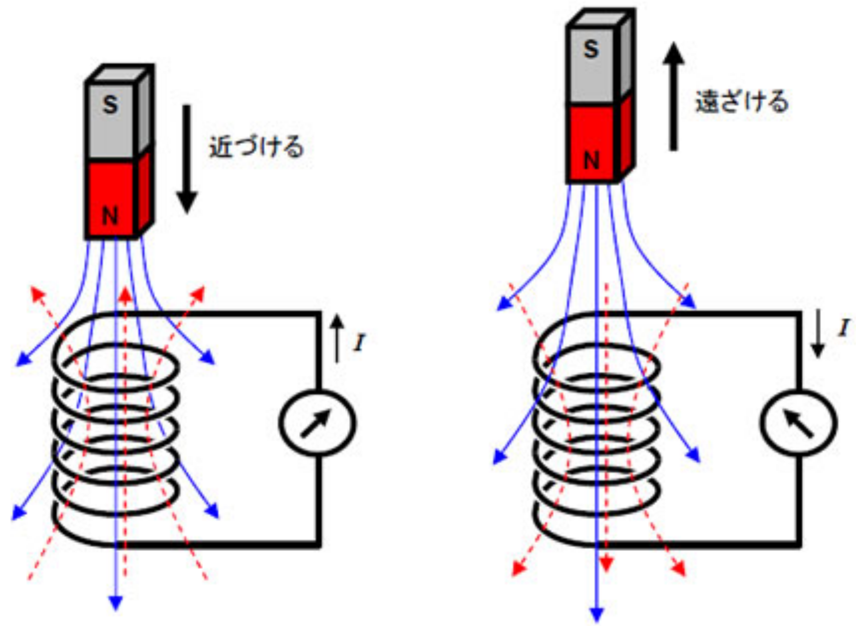
ε 誘電率, ***E*** 電界

- Faradayの電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

B 磁束密度, μ 透磁率



以下、簡単化のため、εとμは定数とする

- すなわち $$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$ (A)
- $$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$ (F)
- (A)の時間微分をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$ (A1)

- (F)のrotをとると

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{E}\right) = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E}\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\boldsymbol{H}\right)$$

(F1)

- (F1) にGaussの法則　$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho$　(ρ 電荷密度)を適用して(A1)を(F1)に代入すると

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

- 媒質中に、電荷も電流もない場合（例えば真空）を考えると、$\rho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$. 従って、

$$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

と、電界ベクトルに関する波動方程式を得る。

- また、このことから、電磁波の伝搬速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

- で与えられる定数となることがわかる。
  - 光速度一定の原理；座標によらない
  - **相対性理論**の基礎

- ここで電界ベクトルとして、以下のような時間に関して変数分離の解を仮定して代入してみる。

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\left(x, y, z, t\right) = \boldsymbol{E}_0\left(x, y, z\right)\exp\left(-j\omega t\right)$$

- すると $$-\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)\exp\left(-j\omega t\right)=\exp\left(-j\omega t\right)\nabla^2\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)$$

- すなわち $$\nabla^2\boldsymbol{E}_0+k^2\boldsymbol{E}_0\left(x,y,z\right)=0$$

($k = \omega/c$, 波数)

- と、電界ベクトルの空間依存部分は、楕円型のHelmholtz方程式を満たすことがわかる。

- 今後様々に電磁界解析などを学ぶであろう。