解析学演習　微分方程式(第 4 回)　解答例

2020/04/20

(1) [2 点] 両辺を $\cos x$ で除すると与式は $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と変形される。この左辺の形に注目すると、この式が $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{\cos x}\cdot y\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ と変形できることが理解される。そこで両辺を x で積分すると $\dfrac{1}{\cos x}\cdot y=\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$ となることから、一般解を $y=\sin x+C\cos x$ と求めることができる。 (C は任意定数)

(2) [2 点]　特性方程式が $\lambda^2-10\lambda+25=0$ となってその解が $\lambda=5$ と重解であることから、この斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp(5x)+C_2x\exp(5x)$ となる。 (C_1, C_2 は任意定数)

(3) [2 点]　随伴斉次方程式の特性方程式は $\lambda^2+\lambda-6=0$ となって、この解は $\lambda=2,-3$ である。よって随伴斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp(2x)+C_2\exp(-3x)$ となる。

次に非斉次方程式の特殊解の候補として $y=Dx\exp(-3x)$ と仮定して与式に代入すると、$y''+y'-6y=-6D\exp(-3x)+9Dx\exp(-3x)+D\exp(-3x)-3Dx\exp(-3x)-6Dx\exp(-3x)$ $=-5D\exp(-3x)=\exp(-3x)$ となることから、$D=-\dfrac{1}{5}$ をうる。これより、非斉次方程式の特殊解の一つとして $y=-\dfrac{1}{5}x\exp(-3x)$ を得た。よって、与えられた非斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp(2x)+C_2\exp(-3x)-\dfrac{1}{5}x\exp(-3x)$ となる。(C_1, C_2 は任意定数)

(4) [2 点]　随伴斉次方程式の特性方程式は $\lambda^2+2\lambda+1=0$ となって、この解は $\lambda=-1$ の重解となる。よって随伴斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp(-x)+C_2x\exp(-x)$ となる。次に非斉次方程式の特殊解の候補として $y=Dx^2\exp(-x)$ と仮定して与式に代入すると

$y''+2y'+y=2D\exp(-x)-4Dx\exp(-x)+Dx^2\exp(-x)+4Dx\exp(-x)-2Dx^2\exp(-x)+Dx^2\exp(-x)$

$=2D\exp(-x)=\exp(-x)$ となるので $D=\dfrac{1}{2}$ をうる。これより、非斉次方程式の特殊解の

一つとして $y=\frac{1}{2}x^2\exp(-x)$ を得た。よって、与えられた非斉次方程式の一般解は

$y=C_1\exp(-x)+C_2x\exp(-x)+\frac{1}{2}x^2\exp(-x)$ となる。(C_1, C_2 は任意定数)

(5) [2 点]　この方程式の随伴斉次方程式の特性方程式は $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ すなわち $(\lambda-1)^3=0$ となって、この解は 3 重解 $\lambda=1$ である。よって、随伴斉次方程式の一般解は $y=C_1\exp x+C_2x\exp x+C_3x^2\exp x$ となる。次に特殊解の候補を $y=C\exp(2x)$ とおいて代入してみる。$y'''-3y''+3y'-1=C(8-3\cdot4+3\cdot2-1)\exp(2x)=C\exp(2x)=\exp(2x)$ となることから $C=1$ となる。これより与式の解は $y=C_1\exp x+C_2x\exp x+C_3x^2\exp x+\exp(2x)$ となる。(C_1, C_2, C_3 は任意定数)