一般相対論　期末試験

担当：椎野（本館 R104）

平成 32 年 6 月 18 日

問題 1　《接続》接続の計量条件を一般の基底であらわす。
ただし $g_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma_{\beta\mu\nu}$ とする。

$$\mathbf{E}_{\alpha}(g_{\beta\gamma}) = \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha\beta} \tag{1}$$

以下トーションが無いとする。

問１　接続の反対称部分を $A^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu})$ とする。
計量条件を足したり引いたりして、接続の対称部分をクリストッフェルシンボル（または、$\mathbf{E}_{\alpha}(g_{\beta\gamma})$）と $A^{\lambda}_{\mu\nu}$ で表せ。(もし分からなければ $A^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ として回答しても構わない)

※二次元ユークリッド空間の計量テンソルは極座標では

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = dr^2 + r^2 d\theta^2. \tag{2}$$

問２　極座標についての座標基底を取って接続を求めよ
問３　極座標の正規直交基底 ($\mathbf{E_r} = (\partial/\partial r)$、$\mathbf{E}_{\theta} = \frac{1}{r}(\partial/\partial\theta)$) を考える。ユークリッド空間での基底ベクトルの微分関係式 $\delta\mathbf{E_r} = \mathbf{E}_{\theta}\delta\theta$、$\delta\mathbf{E}_{\theta} = -\mathbf{E_r}\delta\theta$ から接続

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \langle \mathbf{e}^{\mu}, \nabla_{\mathbf{E}_{\nu}}\mathbf{E}_{\lambda}\rangle = \langle \mathbf{e}^{\mu}, \mathbf{T}\,[\mathbf{E}_{\nu}]\,(\mathbf{E}_{\lambda})\rangle \tag{3}$$

を全て決定せよ。

問４　極座標の正規直交基底についての接続の反対称成分を求める。まず、トーションが無いので交換子 $[\mathbf{E}_{\mu}, \mathbf{E}_{\nu}] = c^{\lambda}_{\mu\nu}\mathbf{E}_{\lambda}$ から反対称成分 $A^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}c^{\lambda}_{\mu\nu}$ を決定せよ。
次に、問１で得られた関係からも接続の対称成分、反対称成分を計算せよ。又、二つの結果が矛盾しないことを確かめよ。

問題 2　《Schwarzschild 時空》球対称静的時空の計量を

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2) \tag{4}$$

と与える。
この時リッチテンソルは

$$R^t_t = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] - (rfh)^{-1}f' \tag{5}$$

$$R^r_r = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] + (rh^2)^{-1}h' \tag{6}$$

$$R^\theta_\theta = R^\phi_\phi = -\frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1-h^{-1}) \tag{7}$$

である。
問１　この時空は無限遠でミンコフスキー時空に近づくとして、真空のアインシュタイン方程式を解け。
問２　座標特異点としての事象の地平線とはどんな物か論ぜよ
問３　事象の地平線付近の事象を無限遠方の観測者が見るとどのように見えるか？詳しく議論せよ。

問題 3　《配点未定》
この講義の「一般的な相対論の教科書に比べた特色」、についてメリットとデメリットを説明せよ
（以上）