目 次

第 1 章　導入 **4**
1.1　双子のパラドクス 4

第 2 章　一般相対性原理 **7**
2.1　空間、多様体、時空 7
2.2　一般相対性原理と座標変換 8
2.3　単位系 10

第 3 章　テンソル代数 **11**
3.1　ベクトル 11
3.2　テンソル 13

第 4 章　リーマン幾何学 **16**
4.1　平行移動とクリストッフェル記号 16
4.1.1　平行移動と共変微分 21
4.2　曲率テンソル 23
4.2.1　ビアンキ恒等式 25

第 5 章　アインシュタイン方程式 **27**
5.1　等価原理と局所慣性（座標）系 27
5.1.1　局所慣性系と接続 27
5.1.2　測地線の長さ 30
5.2　弱場での物体の運動 31
5.3　エネルギー運動量テンソル 33

第 6 章　対称性と計量テンソル **35**
6.1　微分同相写像と座標変換 35

第 7 章　Schwarzschild 解 **36**
7.1　球対称真空解 36
7.2　Kuruskal 座標と事象の地平線 38
7.3　事象の地平線と赤方偏移 42

第 8 章　膨張宇宙 **47**
8.1　一様等方空間 47
8.2　フリードマン方程式 48
8.3　宇宙膨張と赤方偏移 49
8.3.1　輻射優勢の宇宙 50
8.3.2　ダスト優勢の宇宙 50
8.3.3　宇宙項優勢の宇宙 52
8.3.4　赤方偏移 52
8.3.5　地平線 54

第 9 章　重力波 **56**

第 10 章 特異点定理 **57**

関連図書

[1] R. M. Wald, *General Relativity*

[2] 細谷暁夫岩波講座物理の世界　時空の力学

[3] 佐々木節一般相対論　産業図書

[4] 小玉英雄相対性理論　培風館　物理学の基礎

[5] ランダウ、リフシッツ　場の古典論　東京図書

[6] 佐藤勝彦一般相対論。。。

第1章　導入

一般相対論はその発想の原点が、等価原理にある（一般相対性原理は局所的にはある意味当たり前）ことからも時空にちりばめられた局所慣性系の相対的な運動を記述する理論である。そこで現れるのは、局所慣性系間を結びつける接続であり、曲率である。一方、相対論の時空の幾何学としての側面に着目すると大域的な相対性原理は多様体によって体現され、その位相構造や因果構造が大域的にどのように記述されるかは興味深い。

具体的には前者は重力の中での粒子の運動であったり物体がその周辺に作り出す重力場であり、後者は膨張する宇宙であったりブラックホールの地平線であったりする。これらの問題がともに一般相対論によって記述されているということはとても驚くべきことであるが、いっぽう、その事は上の二つの問題が実はまったく不可分であることを言っている。

本稿に於いては、アインシュタイン方程式の導入は一般共変性の要請の元、等価原理を弱い重力場、真空でニュートン重力に近似して行なわれる。他方、非真空については流体力学との類推から決定されるが、この点アインシュタインに不満があったのは有名な話である。

この様にして導入されたアインシュタイン方程式については非真空でありしかも宇宙論的な状況に対しては全く制約を与える余地が無く宇宙が膨張するべきであるとする厳しい予言を与える。このことが宇宙観測によって確かめられたことは驚くべきことであり、数学的に構成されたはずのアインシュタイン方程式が公理としての一般相対性原理、等価原理の妥当性を証明する結果となっている。

問題 1. 宇宙膨張の問題とニュートン重力の問題を同時に相対論の枠組みで考えることは重要である。例をあげれば、膨張宇宙と惑星系の問題である。何故か？その前に膨張宇宙で、地球と太陽の距離は広がっているのか？

1.1　双子のパラドクス

一般相対論的問題の起源として、特殊相対性理論における双子のパラドクスを議論する。まず、地球上に双子の兄弟がいて兄が宇宙船での星間旅行の後地球に帰ってくるシナリオを考える。特殊相対性理論によれば、地球上の弟から

見て亜光速で運動する兄の時間は遅れている筈である。一方、兄から見れば弟と地球は逆方向に亜光速で運動しているので弟の時間は遅れている。このことは兄と弟が離れている限り問題が無いが、兄が地球に帰ってきて弟と対面した瞬間に矛盾した状況が発生する。

これが巷間、知られている双子のパラドクスである。この議論の不正確性は、物理的プロセスの至る所に慣性運動で無い加速仮定が含まれるので、一般相対性理論を考えるべきでこの問題は特殊相対論で扱えないとする説明がされることがあるが正しくない。例えば、宇宙に周期境界条件があった場合は兄はブレーキを踏む事無く地球に戻ってくる事が可能であるので矛盾は特殊相対論の範囲で発生する。

議論を見通し良くするためにより純化された問題設定をする。

ＡＢＣ三つ子の観測者を考える。A は地球上にいるとする。一方Ｂ、Ｃは宇宙をそれぞれ一定速度 $v, -v$ で運動し続けて居て、ある時刻 t_0 において三人の年齢は等しく、Ｂの位置 $x_B(t_0)$、Ｃは地球から見た座標系で v の方向に距離 $x_C(t_0) = 2L$ の地点を通過中である。そして時刻 $t_1 = t_0 + L/v$ では v 方向に $x_B(t_1) = x_C(t_1) = L$ の地点ですれ違うとする。すれ違う時に互いの年齢を光子のやり取りによって確認できるとするとＢ、Ｃの運動は全く対称であるのでＢとＣは同じ年齢である。そしてＣさらに $t_2 = t_0 + 2L/v$ の時刻にＣはブレーキをかけずに地球を通り過ぎ、すれ違うＡと年齢の比較を行う。以上の過程をＡの視点から見ると地球についたＣの年齢は特殊相対論における固有時の概念を評価すればよいので、図より $\sqrt{t_2^2 - 2\left(\frac{L}{c}\right)^2}$ でありこれはＡの年齢 t_2 より少ない。一方 t_1 まではＢ$t_1 < t < t_2$ ではＣの視点を取れば、そのＢ自身、Ｃ自身の固有時の和は変わらないがＡの固有時はさらに（図の中で直線でないので）少ない。矛盾である。

このことは固有時という慣性系の選び方によらない量の取り扱いに誤りがあった。ＢとＣの乗り換えを行うとき、同一地点にある異なる慣性系をつなぐ事をしているがこの二つの同時性の概念は違う。正しくは出発したＢの同時概念を使ってA,Cの邂逅を議論するべきであり、その時にはＢの固有時 $\sqrt{t_2^2 - 2\left(\frac{L}{c}\right)^2}$ に対してＡの固有時は $\sqrt{t_2'^2 - 2\left(\frac{L}{c}\right)^2}$ である。t_2' はＢから見たＡとＣが出会うイベントの座標時なので t_2 よりは長くて $t_2/\sqrt{1-(v/c)^2}$ であるので結局Ａの固有時は t_2 のままである。答え、ＡはＣより若い

ＢとＣの同時性のやりとりで行われたことは一瞬にしてＢの座標系をＣの座標系に移し替える変換であり、言い換えれば一瞬で無限の加速度を受けることに相当する。この瞬間にＡとＣが出会うイベントの座標時が不連続に増加するのである。

ここでさらにＢとＣの乗り換えを防ぐために空間のトポロジーを自明でなく周期性があると考えることができる。

問題 2. 宇宙に周期境界条件が課されている。この時の双子のパラドクスも同じように議論される。果たして、兄と弟の年齢はどのようになるか。矛盾が残っている事を確かめよ。その矛盾はどのような議論で解消されるか？

問題 2 のケースは、たとえ時空の曲率が零であったとしても、特殊相対論の前提が一般的に放棄されなければならないことを言っている。このことを正しく議論するためには我々は空間の概念についての客観的な定義を必要とする。その際、一般相対性原理は自動的に導入されるはずである。

第2章　一般相対性原理

本章では一般相対性理論の基本原理の一つである、一般相対性原理について考える。前章で議論したように、一般相対性原理が必要である原因として空間の構造が問題になる。まず空間の概念について準備する。

2.1　空間、多様体、時空

あらゆる物理学理論において前提条件として空間の存在がある。我々は何気なく空間にたいして直観的に連続的な点の集合といったようなイメージを持って、数学的客観的にその性質を議論することを迂回しがちである。しかし一般相対性理論においては、この空間自体の力学的構造が議論されるのであって、空間の再定義は不可避である。実は、相対論の基本原理の一つである一般相対性原理はこの空間の定義と本質的なつながりを持っている。

ここではまず、空間を定義することから始める。最初に数学的に空間を客観的に定義したのはデカルトである。デカルトの方法は空間内の点をデカルト座標軸を通じて三つの実数の組と同一視した。こうして点の集合としての空間に連続性という概念をとりいれる準備が整う。

一般には、空間とはある点を含む開部分集合を考えてそこに局所的にデカルト座標を導入したものの組みで、全部の和集合がもとの集合と一致するものとする。この概念を多様体と呼び近代的な幾何学の最も基本的な概念であるといえる。開部分集合の数は有限のものも無限のものもあるがリーマン幾何学や一般相対論では、少なくとも局所的には有限である場合について取り扱う。空間の連続性は開部分集合間の包含関係によって例えば

主張 1. どんなに近い二点にも、それぞれを含む互いに共通部分を持たない二つの開部分集合が存在する。

のように記述される。[1]

問題 3. ユークリッド空間は局所的には有限個の開部分集合で覆うことができるが全体を覆うには無限個の開部分集合が必要であることを確かめよ

[1] これはハウスドルフと呼ばれる一連の分離公理の一つである。つまり連続性を議論するときにそれを与える概念は一通りではない。

問題 4. 球面を覆うには少なくとも何個の開部分集合が必要か？円環面ではどうか？

2.2　一般相対性原理と座標変換

一般相対性原理とは言葉にすれば、

一般相対性原理 物理法則は一般座標共変に記述される。

である。われわれの、世界のどこにも座標が書き込まれていないことを見ればわかるように、この原理はある意味あたりまえである。

しかしこの原理は逆にわれわれにこの世界を記述する道具を与えてくれる。まずはそれを用意する。

われわれは、世界を物理的に記述するときにまず、その数値化を行う。そして物理法則はその数値の間の関係式として数学的に記述される。

まず、空間 M そのもの、物体の運動等を記述するために位置を数値化する。これは位置→数値という関数になるはずなので、全体として 4 つの関数の組による写像として座標系 x^μ を定義する。

$$x^\mu : M \mapsto \mathbf{R^4}, p \in M, x^\mu(p) \in \mathbf{R^4} \tag{2.1}$$

正確には空間は多様体であるので、ここで考えた座標とは一つの開部分集合の内部でのみ意味を持つ。

注意が必要なのは、座標は人間が勝手につけたものであるが、M は空間で人間がいるいないに関係なく存在する。座標を与えれば点のを含む二つの開部分集合に得られて、そこに別の座標を導入することができる。そうやって定義された座標間の写像を座標変換と呼ぶことにする。

$$\psi(x^\mu, X^\nu) : \mathbf{R^4} \mapsto \mathbf{R^4}, \psi = X^\nu \circ x^\mu_{-1} \tag{2.2}$$

図 2.1
例、極座標→デカルト座標

$$x = r\cos\phi\sin\theta \tag{2.3}$$
$$y = r\sin\phi\sin\theta \tag{2.4}$$
$$z = r\cos\theta \tag{2.5}$$

ただし原点では座標変換は存在しない、つまり極座標の原点は座標とは言えない。一般に座標とは格子の構造であるがその角度は問題にしない。内積の概念なしに幾何学が構成されていることに留意すべきである。

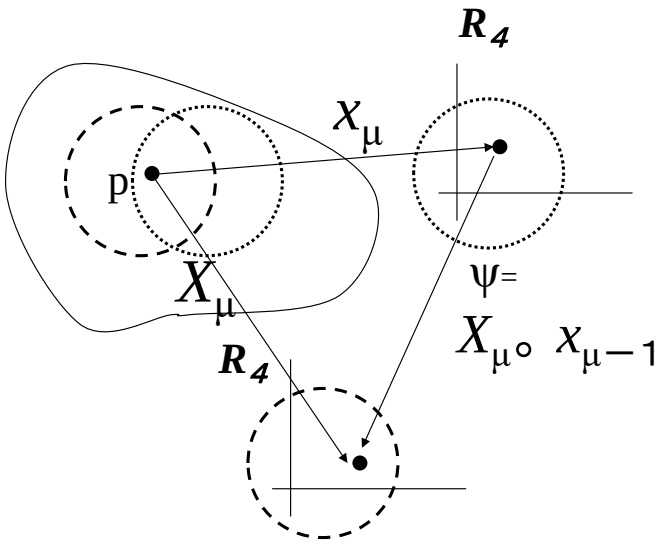

図 2.1: 座標変換

一般相対性原理のいう事は座標変換を行っても物理法則の形は変わらないことである。このことは多様体の概念を以て空間を定義している以上自明の理である。つまり物理法則がリーマン幾何学の言葉で記述されることを要請している。例えば、物理法則が何らかの方程式で記述されているとき、方程式の右辺と左辺が同じ形の座標変換を受けることが要求される。このことは、次節でテンソル代数を導入したところで具体的になる。

2.3 単位系

相対論は座標変換（物理量の数値化の変更）によらない理論であるので、単位系のとり方も実は勝手である。たとえば宇宙物理学では、距離の単位に 1 光年という時間と光速（もちろん定数である）を基準として定義された単位を使うことがある。これはある意味座標変換である。他方、特殊相対論においてローレンツ変換は光速を 1 とすることで（ 1 になるような時間の単位を取ることで）対称性をわかりやすく記述することができた。本稿でもこれにのっとり、時間の単位として、光速を 1 にするような、（つまり光が 1 メートル進むのにかかる時間を 1 光メートルとでもいうべき）時間の単位として採用する。

記号としては、$x_0 = t$ を区別せず使うことにする。空間座標は x_1, x_2, x_3 であり、ギリシャ文字 $\mu, \nu, ,$ は $0 \sim 3$ ラテン文字 $a, b, ,$ は $1 \sim 3$ を走る。

第3章　テンソル代数

時空には局所的に四次元ローレンツ対称性があるので、物理量はその成分が$4^{整数}$個からなる対象によって記述されるはずである。特に相対論は時空の幾何学であるので幾何学的にこれら対象を定義する必要がある。

もっとも簡単に思いつくのは、$4^0 = 1$個の成分である。これは、いわゆる時空の点から数値への写像であるスカラー関数である。スカラーとは成分が1個しかないのでそもそも座標値に関係なく座標変換に対して不変である。

$$f : M \mapsto \mathbf{R} \tag{3.1}$$
$$f'(p) = f(p) \tag{3.2}$$

注意が必要なのは、計算の都合われわれは座標値の関数として関数を定義することがある。

$$F : \mathbf{R^4} \mapsto \mathbf{R}, F = f(x^{\mu}_{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)) \tag{3.3}$$
$$F' = f(X^{\mu}_{-1}(x_0, x_1, x_2, x_3)) \tag{3.4}$$

このとき当然、関数は不変ではない、こういうものFはスカラー関数ではないが、fがスカラー関数であるので混同してスカラー関数と呼んでしまうことにする。

3.1　ベクトル

物体の速度を定義する。速度は座標値の（適当な)時間変化によって数値化されるのでそれを$dx^{\mu}/d\tau$と書くことにする。するとx^{μ}は座標値を与えるスカラー関数の組であったので速度のもっているベクトルとしての性質（向きと大きさによって決定される）は$d/d\tau$に担われている。じっさい、偏微分の公式から

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right) = \Sigma_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{3.5}$$

となり（表記として、演算子を括弧で囲むことで太字表記の代わりにしている)、各座標方向への微分を基底$\mathbf{E}_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)$とした線形空間の元（＝ベクト

ル）が基底方向の成分 $\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$ で与えられていることになる。これから、このように上下の同じ添え字で和をとることが頻繁におこる。以下、常に、上下の同じ添え字は和をとってあからさまに和の記号を書かないことにする。

われわれは、これを一般化して各座標方向成分を V^μ とする任意の方向微分をもって時空のベクトルとすることにする。ベクトルは

$$\mathbf{V} = V^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) \tag{3.6}$$

でもって実体としてのベクトルである。実体としてのベクトルはそれ自体座標の取り方には関係ないので、$\mathbf{V}$ は座標によらない。しかしその座標方向成分 V^μ は座標変換 8.23 のもとで

$$\mathbf{V} = V^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = V'^\mu \left(\frac{\partial}{\partial X^\mu}\right) \tag{3.7}$$

$$V'^\nu = V^\mu \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\right) \tag{3.8}$$

上段の両辺を X^ν に作用させて $\frac{\partial X^\nu}{\partial X^\mu} = \delta^\nu_\mu$ を用いて下段を得た。

こうして定義されたベクトルは本来、粒子の軌道にそった速度ベクトルである。そこで、このようなベクトルを接ベクトルと呼ぶことにする。接ベクトルのことを反変ベクトルと呼んだり上付きベクトルと呼んだりもする。我々は人間であるので数値化された成分 V^μ を使って計算を行う。以下、V^μ のことも接ベクトルと呼ぶことにする。またここで定義された基底は接ベクトルの座標基底と呼ぶ。

ここで接ベクトルの基底は接ベクトルに対してその方向成分を数値として与えるものであったことに注目する。我々がベクトルを取り扱うときには常にその数値化を行うので、ここで言う基底と同じように接ベクトルを数値化する線形の作用を一般化したものである双対空間を定義することにする。ベクトルは方向微分であったが、こんどは関数の勾配 $\mathbf{grad}u = \frac{du}{dx^\mu}$ を考える。偏微分の公式から

$$du = \left(\frac{du}{dx^\mu}\right) dx^\mu \tag{3.9}$$

であるので、これは基底 $\mathbf{e}^\mu = (dx^\mu)$ により、線形空間の元が基底方向への成分分解 $\frac{du}{dx^\mu}$ によって与えられているものと考えられる。これを一般化すればもう一つのベクトル空間

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu \tag{3.10}$$

が定義される。その座標変換は

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\mu dX^\mu \tag{3.11}$$

$$\omega'_\nu = \omega_\mu \frac{dx^\mu}{dX^\nu} \tag{3.12}$$

であたえられる。

接ベクトル V は関数 f に作用して導関数を与えるが

$$\mathbf{V}(f) = df/ds = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f) = V^\mu (df)_\mu = \langle df, V \rangle \tag{3.13}$$

とすれば、導関数の値は接ベクトルに対する余接ベクトルの作用を与える規則であるとみることができる。そこで $\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$ であるので

$$\omega(\mathbf{V}) = \langle \omega, \mathbf{V} \rangle = \omega_\mu V^\nu \langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \rangle = \omega_\mu V^\mu \tag{3.14}$$

となる。確かに ω は $\mathbf{V}$ を $\omega_\mu V^\mu$ に線形に数値化した。このような作用を縮約と呼ぶ。

数学的にはこのような線形数値化作用の集まった空間を双対空間と言う。双対空間は u の勾配ベクトルから構成されたので u の等高線に対して法線方向のベクトルである。双対空間はまた余接ベクトル空間といったりする。またここで考えた基底を余接ベクトルの座標基底と呼ぶ。接空間の基底と余接空間の基底は本来独立に定まるものであるが、余接空間の基底と呼ぶときはつねに $\mathbf{e}^\mu(\mathbf{E}_\nu) = \delta^\mu_\nu$　の関係を保つように定義しなおしておく。本稿では ω 及び、その成分 ω_μ を余接ベクトルと呼ぶ。また、これらを共変ベクトル、下付きベクトルと呼んだりすることもある。

3.2　テンソル

接ベクトルと余接ベクトルが定義されたので、それらを並べかけ合わせることによってテンソルと呼ばれる量を定義する。

ここでは、形式的にいくつかの接ベクトルと余接ベクトルの基底を掛け合わせてテンソルの基底を定義することにする。

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1,\mu_2,\cdots}_{\nu_1,\nu_2,\cdots} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_2}}\right)...(dx^{\nu_1})(dx^{\nu_2})... \tag{3.15}$$

上付きの添え字の数 a 下付きの添え字の数 b であるテンソルを (a, b) 型のテンソルと言ったりもする。元の集合である線形空間としてのテンソル空間は $4^{(a+b)}$ 次元のベクトル空間とみることもできる。また、テンソル空間の元のうちで

$$T^{a_1,a_2,\cdots}_{b_1,b_2,\cdots} = v^{a_1} w^{a_2} ... x_{b_1} y_{b_2} ... \tag{3.16}$$

のように単純に積の形で書けるものを直積と言ったりディアッド (dyadic product) または外積 (outer product)、テンソル積と言ったりするが他の概念と混

同することがあるので注意が必要である。直積は $4(a+b)$ の自由度があるテンソル空間の部分集合であるが線形空間として閉じていない。

幾何学的な解釈は幾通りか可能であるが、たとえば $(1,1)$ 型のテンソルは接ベクトルに作用して接ベクトルを与えるので、一次変換と見ることができる。

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}) = T^{\mu}_{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\langle (dx^{\nu}), \left(\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\right)\rangle X^{\lambda} \tag{3.17}$$

$$= T^{\mu}_{\nu} X^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right) \tag{3.18}$$

また、接ベクトルと余接ベクトルの組にたいして作用して数値化する演算子であるとも言える。(練習で自分で式を書いてみよう)

ここで定義したテンソルによってベクトル空間の内積を定義することにする、内積は二つのベクトルを数値化して一つの数値に写像するのでその様な線形写像の全体は二階の下付きテンソル空間である。$\mathbf{g} = g_{\mu\nu}\,(dx^{\mu})\,(dx^{\nu})$ とすると

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g_{\mu\nu} X^{\mu} Y^{\nu} \tag{3.19}$$

で内積が与えられる。このテンソルを計量テンソルと呼ぶ。X と Y の内積と Y と X の内積は等しいはずなので $\mathbf{g}$ は対称である。見方を変えると、$\mathbf{g}(\mathbf{X},\ ) = g_{\mu\nu} X^{\mu}\,(dx^{\nu})$ は接ベクトル $\mathbf{Y}$ を数値化するので余接ベクトルであるといえる。そこで $g_{\mu\nu}X^{\mu} = X_{\mu}$ と置いて接ベクトルに余接ベクトルを一つ対応させることにする。

今度は余接ベクトルの内積について考える。二階の上付きテンソルを考えれば良いのでそれを $\mathbf{h} = h^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)$ とすると

$$\mathbf{h}(\omega, \pi) = h^{\mu\nu}\omega_{\mu}\pi_{\nu} \tag{3.20}$$

ところで X^{μ},Y_{μ} の縮約は $X_{\mu} = g_{\mu\nu}X^{\nu}$ と Y_{μ} の $\mathbf{h}$ についての内積に一致するべきであるので、

$$X^{\mu}Y_{\mu} = h^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}X^{\nu}Y_{\mu} \tag{3.21}$$

$$h^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{3.22}$$

この h も g と書いたり、あるいは g^{-1} と書いたりして添え字の上下で区別することにする。上付きの計量テンソルの成分は行列として下付きの計量テンソルの逆行列である。

余接ベクトル、テンソルについても接ベクトルと同様に、$g_{\mu\nu}$ および $g^{\mu\nu}$ でもって添え字のあげさげを自由に行う。

縮約の操作は任意のテンソルに対して自然に拡張されて線形演算である。

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \mathbf{T}\mathbf{X}+\mathbf{T}\mathbf{Y} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{T}(f\mathbf{X}) = f\mathbf{T}(\mathbf{X}) \tag{3.24}$$

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})(\mathbf{X}) = \mathbf{T}\mathbf{X}+\mathbf{S}\mathbf{X} \tag{3.25}$$

$$(f\mathbf{T})(\mathbf{X}) = f\mathbf{T}(\mathbf{X}) \tag{3.26}$$

第4章　リーマン幾何学

本章では曲がった空間を取り扱う道具立てである、リーマン幾何学を導入する。

4.1　平行移動とクリストッフェル記号

空間の曲がり具合、平坦な空間からのずれを扱うのであるがその為には空間内の一点では無く、あるていど広がりのある領域を考える。たとえば、地球上の人間を考えれば、人間がどうやって地表の曲がりを感じるかというと建設的な方法は測量である。緻密な三角測量を丹念に繰り返すことによって、われわれは地表面が平坦でなく曲がっていることを知るだろう。

測量においてもっとも重要なのは二点間の距離を測るという行為である。ここで、問題なのはどのような経路に沿っての測量値を距離と採用するかである。われわれは、ほぼ平坦な空間で暮らしているので、直感的に最短距離を距離として採用すべきことを知っている。しかし、このような直感が曲がった空間で当てはまるかどうかは自明でない。

一般的に距離を測るとき我々は地表にメジャーを押し当てて伸ばしていき目標の地点に到達したところでその値を読む。

このことを前章で与えたベクトルの言葉でいえば、われわれは各点ごとに接ベクトル（＝メジャーの向き）を決め、それを積分して（＝押し当てて伸ばしていく）最終的に値を得ている。問題になるのは接ベクトルをどの向きにとればよいかということである。われわれの直感はまっすぐにすべきだというだろう。

つまりまっすぐの定義を数学的に与えればよい。答えを得るために、われわれは平坦な空間の類推からはじめる。デカルト座標では自明に直線の接ベクトルは一定であると言ってしまえばよい。では、平面とその上の極座標を用意することにする。

我々が極座標上のある一点に居る、しかし我々はそれが極座標であることを知らない。すると、この座標に由来する二つのカーブ $C_1(\theta = \theta_0)$ と $C_2(r = r_0)$

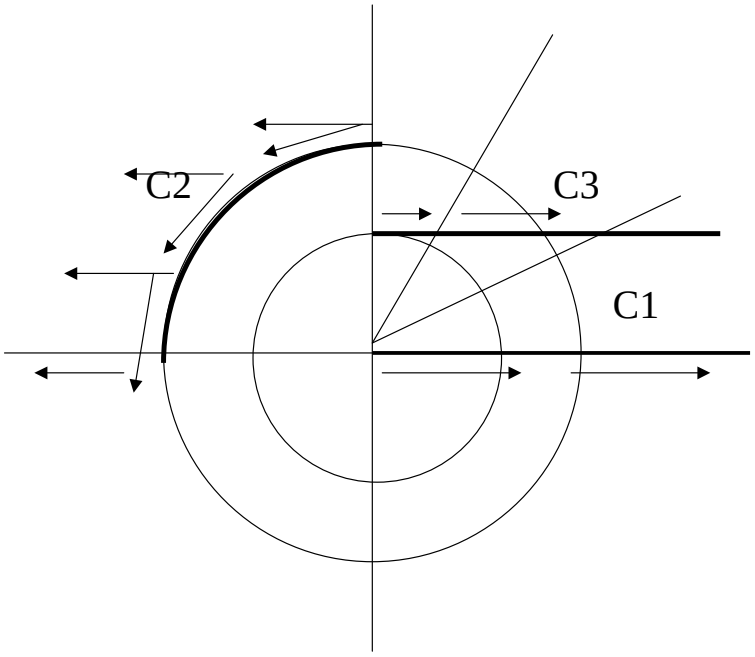

図 4.1: 極座標のカーブ

を考える。それぞれ、

$$\mathbf{X_1} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right), \mathbf{X_2} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{4.1}$$

$$(X_1^r, X_1^\theta) = (1, 0),\ (X_2^r, X_2^\theta) = (0, 1) \tag{4.2}$$

という接ベクトルにそって伸びている。このとき、我々はC_1のみが「まっすぐ」であることを知らない。

ではそれはなぜか？接ベクトルX_1は常に同じ方向を向いているからである。つまり、ベクトルの方向の変化していないベクトル（場）採用すればいいはずである。

ベクトルの方向の変化を見ればよいのだから、ベクトルのr及びθの各成分をその経路に沿って微分してみればよい、しかしこれには罠があって、じっさい各方向成分を経路にそってC_1はrについてC_2はθについて微分してみるとどちらもゼロになっているのである。極座標なんかを使ったのが間違いだといわれればそれまでだが、一般相対論は座標系によらず定義されないといけないので、極座標でもうまいやり方があるはずである。

ここで、微分の意味について考える。微分とはもちろん二つの微小にはなれた地点それぞれの量の間の変化を比べることであるが実はベクトルをどちらか

の地点に移して比べる必要がある。上の場合、われわれは座標基底の力を借りて勝手に成分ごと変化させずに、移して微分をしたがそれは、図のように座標の網に沿ってベクトルを回転してしまったことになる。我々がしたいのは、ベクトルを図のように「平行に」移動させて方向の変わらないベクトルからカーブ C_3 を考えたいのである。

以上の事を踏まえて一般的な定式化を行う。ベクトル解析の考え方をとればベクトルは基底ベクトルで展開される。$\mathbf{A} = A^\mu \mathbf{E}_\mu$　そして平行移動とは基底ベクトルと関係なく定義されるはずで、例えばユークリッド空間においては $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$ である。そして上記の極座標において平行移動が非自明であったのは基底ベクトルが一定で無く場所によって向き、が変わってしまったからである。

したがってユークリッド空間において、接ベクトル $\mathbf{A}(s)$ を接ベクトル $\mathbf{X} = (d/ds) = X^\mu \mathbf{E}_\mu$ に沿って δs の距離 “平行に” 移動されたベクトルの族と考えると

$$
\begin{aligned}
0 &= A^\mu(s+\delta s)\mathbf{E}_\mu(s+\delta s) - A^\mu(s)\mathbf{E}_\mu(s) && (4.3)\\
&= A^\mu(s+\delta s)\mathbf{E}_\mu(s+\delta s) - A^\mu(s)\mathbf{E}_\mu(s+\delta s) && (4.4)\\
&+ A^\mu(s)\mathbf{E}_\mu(s+\delta s) - A^\mu(s)\mathbf{E}_\mu(s) && (4.5)\\
&= \left(\frac{dA^\mu(s)}{ds}\right)\mathbf{E}_\mu(s)\delta s + A^\mu(s)\left(\frac{d\mathbf{E}_\mu(s)}{ds}\right)\delta s + O(\delta s^2) && (4.6)
\end{aligned}
$$

ここで同一方向上の異なる地点での基底ベクトルの差は微小な変位 δs に対して零ないし線形であるので $\mathbf{T}(\cdot)$ を基底の一次変換によって生じる基底の差として

$$
\left(\frac{d\mathbf{E}_\mu(s)}{ds}\right)\delta s = \mathbf{T}(\mathbf{E}_\mu(s))\delta s \tag{4.7}
$$

と定める。両辺はベクトルであるので、余弦ベクトル空間の基底を作用させると

$$
\mathbf{e}^\nu\left(\frac{d\mathbf{E}_\mu(s)}{ds}\right) = \langle \mathbf{e}^\nu, \mathbf{T}(\mathbf{E}_\mu(s))\rangle = T^\nu_\mu \tag{4.8}
$$

したがってこの方向への平行移動はある一次変換差分 T によって与えられて

$$
\begin{aligned}
&A^\mu(s+\delta s)\mathbf{E}_\mu(s+\delta s) - A^\mu(s)\mathbf{E}_\nu(\mathbf{s}) && (4.9)\\
&= \left[\left(\frac{dA^\mu(s)}{ds}\right)\mathbf{E}_\mu(s) + A^\mu(s)T^\nu_\mu\mathbf{E}_\nu(s)\right]\delta s = 0 && (4.10)
\end{aligned}
$$

これを平行に移動したときのベクトルの差分 $\delta s \cdot \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A}$ と置いて、ある種の導関数の関係式 $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A} = 0$ でもって $\mathbf{A}$ の $\mathbf{X}$ 方向への平行移動を定義する。任意の

方向 $\mathbf{Y} = Y^\mu \mathbf{E}_\mu$ への平行移動の全体を考えれば、一次の微小差分の範囲でこれはベクトルに値を持つ線形空間であり $\nabla_{\mathbf{E}_\mu}\mathbf{A}$ はその基底である。$\mathbf{X}$ 方向への平行移動による $\mathbf{A}$ の微分係数 $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A} = X^\mu \nabla_{\mathbf{E}_\mu}\mathbf{A} = X^\mu \nabla_\mu \mathbf{A} = \langle \nabla\mathbf{A}, \mathbf{X}\rangle$ とすると、ユークリッド空間において基底や座標に左右されない (1,1)-" テンソル"$\nabla\mathbf{A}$ が得られる。これは座標にも基底にもよらないので、ユークリッド空間における共変微分と呼ぶ事にする。また基底によらず自明に $\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X}(f)$。こうして定義された共変微分はデカルト座標系とその基底ベクトルについての座標偏微分に他ならないが、その事はそうであるように、一次変換による差分 $\mathbf{T}$ を定めたことに起因する。実際、例えば極座標においては、そこでの基底ベクトルの定義から (4.8) によって $\mathbf{T}$ は決定される。

接空間自体を基準に考えれば、接空間間の一次変換を与えればよい。これをアフィン接続と呼ぶ。$\mathbf{E}^\lambda$ は列ベクトル表記成分の意味で定ベクトルであるので、すべての接続係数を与えるには

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \langle \mathbf{e}^\mu, \nabla_{\mathbf{E}_\nu}\mathbf{E}_\lambda\rangle = \langle \mathbf{e}^\mu, \mathbf{T}\left[\mathbf{E}_\nu\right](\mathbf{E}_\lambda)\rangle \tag{4.11}$$

を評価すればよい。ここで $\mathbf{T}\left[\mathbf{E}_\nu\right]$ は E_ν 方向に単位変位での一次変換差分である。ユークリッド空間ではデカルト座標によって平行移動は自明に定義されているので、一次変換はそれに従う。一方、リーマン幾何学では一次変換を定義することによって多様体上での幾何学を与える。

問題 5. このユークリッド空間の一次変換を二次元極座標系の正規直交基底 $\mathbf{E}_\mathbf{r} = \cos\theta\mathbf{E}_\mathbf{x} + \sin\theta\mathbf{E}_\mathbf{y}$、$\mathbf{E}_\theta = -\sin\theta\mathbf{E}_\mathbf{x} + \cos\theta\mathbf{E}_\mathbf{y}$ について定めて、その差分 $\mathbf{T}\left[\mathbf{E}_\nu\right],\ (\nu = r, \theta)$ を行列の形で与えよ。

実はここでの議論には不定性があって、$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A}$ を線形空間の元と考える際に $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$ を $\mathbf{X}$ を不変に保つ一次変換（$\mathbf{R}[\mathbf{X}](\mathbf{X}) = \mathbf{X}$）とすれば、$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{A} = \langle \nabla\mathbf{A}, \mathbf{R}[\mathbf{X}](\mathbf{X})\rangle$ としても間違いではない。つまり ∇A には $\mathbf{R}$ の寄与による不定性がある。式に書けば $\Gamma'^\lambda_{\mu'\nu} = R[\mu]^\mu_{\mu'}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ であるが例えば $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ についてのトーションの定義式に代入すれば Γ, Γ' ともにトーションが無いためには $\mathbf{R}[\mathbf{X}] = \mathbf{R}[\mathbf{Y}]$ となる一次独立な 4 つのベクトルを不変に保つ一次変換は恒等変換しかないので、トーションなし条件のもとこの不定性は解消される。

一般相対論においては、我々はレヴィチヴィタ接続を採用するが、その事は等価原理に由来していてそのことは次章で扱う。

ここでは、ユークリッド空間以外の空間つまり曲がっている空間を扱うために、一般的に接続を与える。そのためにはここで初めてベクトル空間の構造と

して前章で導入した計量テンソルによる内積を考える。ひとたび、ベクトル空間に内積が導入されると、接続には幾何学的制約が生まれる。これは形式的に考えていた基底ベクトルが実際に各点で基底ベクトル場として機能する為には、基底についての方向余弦が各点で同じ意味を与えないといけない。言うなれば、点 p から q に平行移動されたベクトル $\mathbf{V}$ について $\nabla V = 0$ であれば $\mathbf{g}(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{V})|_{\mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{V})|_{\mathbf{q}}$ であるという事である。これは、計量テンソルが平行移動によって変化しない事つまり $\nabla g = 0$ を意味する。

接続 (4.11) を対称部分と反対称部分にわける。

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} + A^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\nu\mu)} - A^\lambda_{\nu\mu} \tag{4.12}$$

双対基底の定義 $\langle \mathbf{e}^\mu, \mathbf{E}_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu$ は平行移動しても一定なので $\langle \nabla_{\mathbf{E}_\mu} \mathbf{e}^\lambda, \mathbf{E}_\nu \rangle = -\langle \mathbf{e}^\lambda, \nabla_{\mathbf{E}_\mu} \mathbf{E}_\nu \rangle = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ であることを使うと、

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\mathbf{E}_\lambda} \mathbf{g})(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu) && (4.13)\\
&= (\nabla_{\mathbf{E}_\lambda} g_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta)(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu) && (4.14)\\
&= \mathbf{E}_\lambda(g_{\alpha\beta}) \mathbf{e}^\alpha(\mathbf{E}_\mu) \mathbf{e}^\beta(\mathbf{E}_\nu) + g_{\alpha\beta} \langle \nabla_{\mathbf{E}_\lambda} \mathbf{e}^\alpha, \mathbf{E}_\mu \rangle \mathbf{e}^\beta(\mathbf{E}_\nu) + g_{\alpha\beta} \langle \nabla_{\mathbf{E}_\lambda} \mathbf{e}^\beta, \mathbf{E}_\nu \rangle \mathbf{e}^\alpha(\mathbf{E}_\mu) && (4.15)\\
&= \mathbf{E}_\lambda(g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\nu\lambda\mu} - \Gamma_{\mu\lambda\nu} && (4.16)
\end{aligned}$$

ただし $\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ である。この 4×1 0 個の条件を計量条件 (metricity) とよぶ。

問題 6. この方程式を $\{\lambda \to \mu \to \nu\}$ 循環置換して三組の方程式を得る。それらをうまく足し引きすることにより接続の対称部分を $g_{\mu\nu}$ と $A^\lambda_{\mu\nu}$ から与えよ。

問いの結果より

$$\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} - g^{\lambda\alpha}(g_{\nu\beta} A^\beta_{\mu\alpha} + g_{\mu\beta} A^\beta_{\nu\alpha}) \tag{4.17}$$

である。ただし $\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ は

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\mathbf{E}_\mu(g_{\nu\alpha}) + \mathbf{E}_\nu(g_{\alpha\mu}) - \mathbf{E}_\alpha(g_{\mu\nu}) \right) && (4.18)\\
&= \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} \right) && (4.19)
\end{aligned}$$

であり、クリストッフェルシンボルと呼ぶ。下段の式は E_μ が座標基底であるとした。$\mu\nu$ の対称性から対称部分には $4 \times$ 10 個の自由度が計量条件に対して必要十分に求まった。

反対称部分について調べるために、基底の交換子

$$[\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu](f) = \mathbf{E}_\mu(\mathbf{E}_\nu(f)) - \mathbf{E}_\nu(\mathbf{E}_\mu(f)) = c^\lambda_{\mu\nu}\mathbf{E}_\lambda(f) \tag{4.20}$$

を考える。ここで c は基底の生成する変換の構造定数であり、基底の対称性を表している。自明な並進に対してゼロであり、当然それは座標格子を生成する。この式はベクトルの作用を表しているので以下の右辺線形な量を（1，2）型のテンソル $\tau(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu) = \nabla_{\mathbf{E}_\mu}\mathbf{E}_\nu - \nabla_{\mathbf{E}_\nu}\mathbf{E}_\mu - [\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu]$ を定義すると $A^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu})$ なので

$$A^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(c^\lambda_{\mu\nu} + \langle \mathbf{e}^\lambda, \tau(\mathbf{E}_\mu\mathbf{E}_\nu)\rangle)$$

である。τ はトーションと言ってこのような議論では決定できない成分である。次章の議論によって一般相対論では零であると仮定するが、リーマン幾何学の立場では存在を考慮することもある。

トーションの幾何学的意味については座標基底をとってポアンカレの補題にあてはめてみると良い。トーションが存在すると与えた接続だけでなく、トーションを取り除いた架空の接続も共変性を実現するので、本来の共変微分は唯一の共変な方向微分という意味を失う。トーション無しで定義されたベクトルの渦が無ければポテンシャルが存在してベクトルは勾配で与えられる。しかし本来の幾何学的な渦はゼロでは無い。トーション無しで定義された渦はまさに基底ベクトルを与えるだけで決まりそれは幾何に関係なく与えられるものと一致している。

また、測地線の振る舞いについての条件として接続を決めることもできる。しかし次節で見るように反対称部分は測地線からは完全には決まらないので、この議論でトーションを決めることは出来ない。

4.1.1 平行移動と共変微分

ベクトルの平行移動にもどる。接ベクトル $\mathbf{X}$ が $\mathbf{X}$ 自身によって平行移動されているとすると

$$\langle \nabla\mathbf{X}, \mathbf{X}\rangle = X^\mu \nabla_\mu X^\nu = 0 \tag{4.21}$$

このような X を接ベクトルとしてもつカーブはパラメータ込みでただ一つ決まる。これを測地線と呼ぶがパラメータの取り方を変えたものつまり X の長

さを伸縮させたものも空間内で同じ測地線に対応するので

$$X^\mu \nabla_\mu X^\nu = \alpha X^\nu \tag{4.22}$$

を一般に測地線の方程式と呼ぶ。

粒子の運動において方向成分 X^μ は $\frac{dx^\mu}{du}$ （u は適当な時間パラメータ）であるので代入すればこれは測地線方程式 4.21 式になるはずである。このときあらかじめ u のとり方を調整して右辺をゼロにしておくことが可能である。

$$u_a = e^{\alpha u}, \to \mathbf{X} = \frac{du_a}{du}\frac{d}{du_a} = u_a'(u)\mathbf{X}', \ \to \langle \nabla \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle = X'^\mu \nabla_\mu X'^\nu = 0 \tag{4.23}$$

また u_a をアフィンパラメータと呼ぶ。座標基底成分での測地線方程式は

$$\left(\frac{d^2 x^\nu}{du_a^2}\right) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{du_a}\right)\left(\frac{dx^\lambda}{du_a}\right) = 0 \tag{4.24}$$

であればよい。接続の対称成分のみが測地線に影響を与えている。$\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ の対称部分は空間の性質からくる加速度を与えていると見ることができる。

接ベクトルの共変微分が得られたので、これから一般のテンソルの共変微分を知ることができる。

一般のテンソルの共変微分の性質は

- スカラーに対しては $\nabla_{\mathbf{X}}\phi = X^\mu \nabla_\mu \phi = X^\mu \partial_\mu \phi$
- a, b を定数、$\mathbf{T}, \mathbf{S}$ を同じ型のテンソルとする。$\nabla_{\mathbf{X}}(a\mathbf{T} + b\mathbf{S}) = a\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T} + b\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{S}$
- $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{TS} = (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{T})\mathbf{S} + \mathbf{T}\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{S})$
- 共変微分と縮約操作は可換

まず、余接ベクトルの共変微分を考える。余接ベクトルが接ベクトルに演算するとスカラーを与えるので、1 番目の性質から

$$\partial_\mu(\omega_\nu X^\nu) = (\nabla_\mu \omega_\nu X^\nu) = \nabla_\mu(\omega_\nu)X^\nu + \omega_\nu(\nabla_\mu X^\nu) \tag{4.25}$$

左辺に偏微分に対する普通のライプニッツ則を適用すれば、容易に

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda \tag{4.26}$$

であることがわかる。同様の議論を繰り返せば、例えば $(1,1)$ のテンソルの共変微分は

$$\nabla_\mu T^\nu_\lambda = \partial_\mu T^\nu_\lambda + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}T^\alpha_\lambda - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}T^\nu_\alpha \tag{4.27}$$

である。

最後に、クリストッフェル記号の座標変換に対する性質を見る。

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial X^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial X^\lambda}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\beta}{\partial X^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial X^\lambda}\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \tag{4.28}$$

つまりこれは共変でない。このことは重要で、座標変換によっていつでも零にできることを意味している。つまり次々節で導入する局所慣性系の存在を意味している。

4.2 曲率テンソル

準備が整ったので、空間の曲がり具合を定式化することにする。

我々が、平行移動によって空間を測量しようとするとき空間の曲がりはどのように現れるだろうか？前節で述べたように平行移動の受ける慣性力 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ は局所的には零にできる。よって、軌道の受ける重力を見ても座標によらない空間の曲がりはわからない。

そこで、平面の例に戻ってみると平行移動はその経路に関係なく定義されている。これは曲がった空間でも正しいだろうか？典型的な例としては球面上を中心角９０度移動する運動を３回繰り返し元の点に戻ってくる例を考える。経路は測地線であるので、内積の保存する平行移動をするときに経路と任意のベクトルの角度は保存する。->図

したがって平行移動は個々に非可換であり、その経路依存の程度をもって空間の曲がりを評価できる。この経路依存性の評価においてストークスの定理が本質的な役割をする。

$$\oint_{\partial S}\mathbf{A} = \oint_{\partial S} A_\mu dx^\mu = \int_S dS^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \int_S \mathbf{dA} \tag{4.29}$$

左辺は経路に沿って「力場によって受ける影響 $\mathbf{A}$」を積算している。右辺は周回の結果を $\mathbf{dA}$（三次元では $\sim \mathbf{rotA}\cdot\mathbf{n}dS$）で評価している。これがSを貫いている場の強さと考える。面 S に平行な二つの接ベクトルと縮約して値を返すのであるから、右辺の積分の中身は $(0,2)$ テンソルである。（電磁場においてベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ にはゲージ不定性があっても磁場 $\mathbf{B}=\mathbf{rotA}$ にはそれが無かった事に気付くべきである。）技術的な理由で (ゲージ) 共変的な微分演算子 $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ を定義すると $[D_\mu, D_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ であり、（より正確には一般の基底について $[D_{\mathbf{E}_\mu}, D_{\mathbf{E}_\nu}] - D_{[\mathbf{E}_\mu,\mathbf{E}_\nu]} = ie\mathbf{dA}(\mathbf{E}_\mu,\mathbf{E}_\nu)$）共変な移動（$\Rightarrow D_\mu(\cdot)=0$）の非可換さが場の強さである。

つまり、四次元での力場の強さ（空間の曲がり）は任意に曲面を $(\mathbf{E}_\mu,\mathbf{E}_\nu)$ で指定して、あらゆる曲面での力場の影響下での平行移動の非可換さを定式化すればよい。平行移動による影響はベクトルの一次変換で表されるので、上の

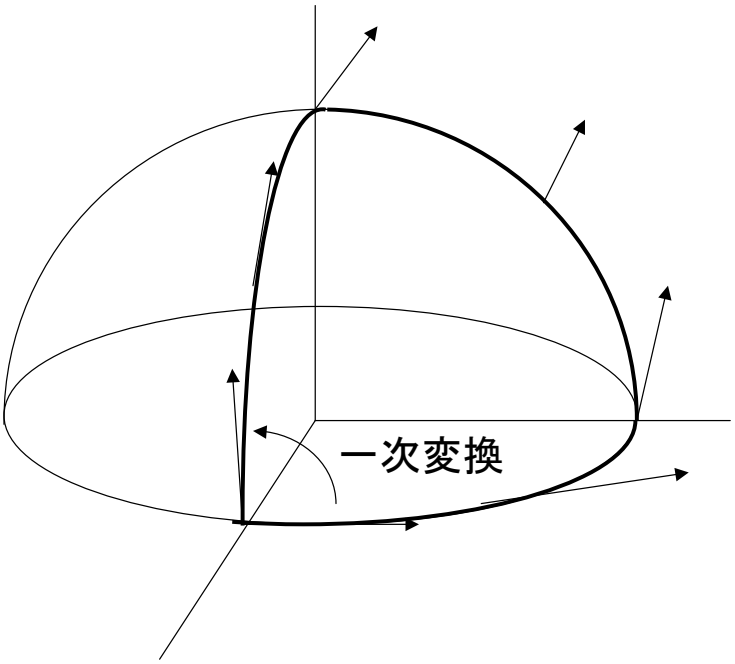

図 4.2: 球面上の平行移動

dA に相当するもので一次変換に値を持つものが場の強度＝空間の曲がりである。面の持つ二つの接ベクトルと縮約して一次変換 $(1,1)$ を与えるのであるから求めている曲率は $(1,3)$ のテンソルである。

リーマン曲率テンソルの定義は一次変換演算子に値を取って

$$\left\{[\nabla_{\mathbf{E}_\mu}\nabla_{\mathbf{E}_\nu}-\nabla_{\mathbf{E}_\nu}\nabla_{\mathbf{E}_\mu}]-\nabla_{[\mathbf{E}_\mu,\mathbf{E}_\nu]}\right\}=\mathbf{R}(\mathbf{E}_\mu,\mathbf{E}_\nu) \tag{4.30}$$

と与えられる。特に座標基底を取った時には

$$[\nabla_\mu\nabla_\nu-\nabla_\nu\nabla_\mu]X^\lambda=R^\lambda_{\alpha\mu\nu}X^\alpha \tag{4.31}$$

と書けて、共変微分の定義をそのまま代入すれば

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho}=\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho}-\partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda}+\Gamma^\mu_{\lambda\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\rho}-\Gamma^\mu_{\rho\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \tag{4.32}$$

である。定義より直ちに

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho}=-R^\mu_{\nu\rho\lambda} \tag{4.33}$$

さらに、$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ がクリストッフェルシンボルであるときは定義から

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\rho}+\partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\lambda}-\partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\lambda}-\partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\rho})+g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\nu\lambda}\Gamma^\beta_{\mu\rho}-\Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\beta_{\mu\lambda}) \tag{4.34}$$

となり、ここまで書くとリーマンテンソルの残りの対称性

$$R_{\mu\nu\lambda\rho}=-R_{\nu\mu\lambda\rho},\quad R_{\mu\nu\lambda\rho}=-R_{\lambda\rho\mu\nu}$$
$$R^\mu_{\alpha\beta\gamma}+R^\mu_{\beta\gamma\alpha}+R^\mu_{\gamma\alpha\beta}=0$$

も分かり易い。さらにあとで必要になるので、

$$R_{\mu\nu}=R^\alpha_{\mu\alpha\nu},\quad R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \tag{4.35}$$

を定義しておく。それぞれ、リッチテンソル、リッチスカラーと呼ぶ。さらに、残りの曲率成分を

$$C^\mu_{\nu\lambda\rho}=R^\mu_{\nu\lambda\rho}-\frac{1}{2}(\delta^\mu_\lambda R_{\nu\rho}-\delta^\mu_\rho R_{\nu\lambda}-g_{\nu\lambda}R^\mu_\rho+g_{\nu\rho}R^\mu_\lambda)+\frac{R}{6}(\delta^\mu_\lambda g_{\nu\rho}-\delta^\mu_\rho g_{\nu\lambda}) \tag{4.36}$$

と書いておく。これはワイルテンソルと呼ばれる。

4.2.1 ビアンキ恒等式

空間の力学的な性質と関係づけるため、曲率テンソルの微分について調べておく。

直接計算することによって

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} + \nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} = 0 \tag{4.37}$$

さらに $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ を導入することによって

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0 \tag{4.38}$$

が得られる。これらの恒等式をビアンキ恒等式と呼ぶ。連続の方程式の形をとっているので、何らかの保存則との関係がある事は想像がつく。

第5章　アインシュタイン方程式

5.1　等価原理と局所慣性（座標）系

等価原理には厳密にはいくつかの定式化があるが、ここでは弱い等価原理

等価原理（弱い）重力場中の自由な物体の運動は位置と初速度だけから決まる。つまり重力質量と慣性質量は比例する。

とアインシュタインの等価原理

等価原理（アインシュタイン）局所慣性系が微小変位一次の精度でつねに存在する。局所慣性系では重力以外の物理法則は慣性系のそれと変わらない。

を問題にする。

局所慣性系とはある局所的な座標系（基底系）である。アインシュタインの等価原理によれば、その局所座標について物体は慣性運動（等速直線運動）をするように位置が観測（数値化）される。このことは、弱い等価原理を演繹する。逆はどうであるか？前章で見たように測地線方程式は接続の対称成分のみに依存する。局所慣性系の性質を仮定したときに接続はどこまで決定されるべきであろうか？

一方、試験物体とはその物体の作り出す重力が背景の時空の重力に比べて無視できるような理想的な試験体である。物体自身の作り出す重力（自己重力）が無視できないときに測地線を通るかどうかは難しい問題である。この問題は強い等価原理としてしられるが、とくに重力波が発生するような系では自明ではなく、非常に複雑な解析を必要とする。

5.1.1　局所慣性系と接続

前章では非ユークリッド幾何学における接続について紹介したが、本節ではあらためて等価原理の要請から接続を決定する。

前節から、物体の運動に生じる慣性力に影響を与えるのは基底系の微分一階からであるので、局所慣性系が微小変位一次の精度で存在すると仮定する。[1]

[1] 二次精度で要求すれば曲率ゼロとなるので時空の幾何は自明とならざるを得ない。

局所慣性系での基底ベクトルを $\overline{\mathbf{E}}_\alpha$ とすれば、

$$\mathbf{g}(\overline{\mathbf{E}}_\alpha, \overline{\mathbf{E}}_\beta) = \eta_{\alpha\beta} \tag{5.1}$$
$$\overline{\mathbf{E}}_\gamma(\mathbf{g}(\overline{\mathbf{E}}_\alpha, \overline{\mathbf{E}}_\beta)) = 0 \tag{5.2}$$

一般の基底ベクトル $\mathbf{E}_\mu$ との関係は基底の変換行列によって $\overline{\mathbf{E}}_\alpha = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \mathbf{E}_\mu$ と与えられるとして上の式に代入すれば

$$0 = \overline{\Lambda}^\lambda_\gamma \mathbf{E}_\lambda(\mathbf{g}(\overline{\Lambda}^\mu_\alpha \mathbf{E}_\mu, \overline{\Lambda}^\nu_\beta \mathbf{E}_\nu)) \tag{5.3}$$
$$= \mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\mu_\alpha \overline{\Lambda}^\nu_\beta \mathbf{g}(\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu)) \tag{5.4}$$
$$= \mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\mu_\alpha)\overline{\Lambda}^\nu_\beta g_{\mu\nu} + \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\nu_\beta) g_{\mu\nu} + \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \overline{\Lambda}^\nu_\beta \mathbf{E}_\lambda(g_{\mu\nu}) \tag{5.5}$$

Λ の逆行列を適宜かければ

$$\mathbf{E}_\lambda(g_{\sigma\eta}) = -g_{\mu\eta}\mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\mu_\alpha)(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_\sigma - g_{\sigma\nu}\mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\nu_\beta)(\overline{\Lambda}^{-1})^\beta_\eta \tag{5.6}$$

となり、ここで $-\mathbf{E}_\lambda(\overline{\Lambda}^\mu_\alpha)(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_\sigma =: \overline{\Gamma}^\mu_{\lambda\sigma}$ とすれば

$$\mathbf{E}_\lambda(g_{\sigma\eta}) = \overline{\Gamma}_{\eta\lambda\sigma} + \overline{\Gamma}_{\sigma\lambda\eta} \tag{5.7}$$

これは、前章 (4.16) と同じなので対称部分、反対称成分に分解して $\overline{\Gamma}^\lambda_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} - g^{\lambda\alpha}(g_{\nu\beta}A^\beta_{\mu\alpha} + g_{\mu\beta}A^\beta_{\nu\alpha})$、$\overline{\Gamma}^\lambda_{[\mu\nu]} = A^\lambda_{\mu\nu}$ である。$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ は引き続きクリストッフェル記号である。反対称部分は基底ベクトルの構造定数とトーションの和の半分である。

$$A^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) = \frac{1}{2}(c^\lambda_{\mu\nu} + \langle \mathbf{e}^\lambda, \tau(\mathbf{E}_\mu \mathbf{E}_\nu)\rangle)$$

ここでさらに別の一般基底 $\mathbf{E'}_{\mu'}$ に変換 $\mathbf{E'}_{\mu'} = \Lambda^\mu_{\mu'}\mathbf{E}_\mu$ を考えれば

$$\overline{\Gamma}^{\lambda'}_{\mu'\nu'} = -\mathbf{E'}_{\mu'}(\overline{\Lambda}^{\lambda'}_\alpha)(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_{\nu'} \tag{5.8}$$
$$= -\Lambda^\mu_{\mu'}\mathbf{E}_\mu(\overline{\Lambda}^\lambda_\alpha \Lambda^{\lambda'}_\lambda)(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_{\nu'}) \tag{5.9}$$
$$= -\Lambda^\mu_{\mu'}\mathbf{E}_\mu(\Lambda^{\lambda'}_\lambda)\overline{\Lambda}^\lambda_\alpha(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_\nu(\Lambda^{-1})^\nu_{\nu'}) + \Lambda^\mu_{\mu'}\Lambda^{\lambda'}_\lambda(\Lambda^{-1})^\nu_{\nu'}\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \tag{5.10}$$

第一項は $-\Lambda^\mu_{\mu'}\mathbf{E}_\mu(\Lambda^{\lambda'}_\nu)\Lambda^{\nu'}_\nu$ と書き換える事ができる。第一項目はテンソルの変換ではないので基底系の選び方で接続のある成分を零にすることが出来る。双対基底 $\mathbf{e}^{\lambda'}$ を使えば $\Lambda^{\lambda'}_\nu = \langle \mathbf{e}^{\lambda'}, \mathbf{E}_\nu\rangle$ なのでその反対称部分は

$$\frac{1}{2}(\mathbf{E}_\mu(\Lambda^{\lambda'}_\nu) - \mathbf{E}_\nu(\Lambda^{\lambda'}_\mu)) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{e}^{\lambda'}, [\mathbf{E}_\mu, \mathbf{E}_\nu]\rangle$$

今考えている $\overline{\Gamma}$ の反対称部分はトーションと構造定数の和を 2 で割ったものだったのでトーションの部分は第一項に寄与していない、つまりテンソルの変換性を持つ事がわかる。したがって局所慣性系に於いてもトーションは零にはなり得無い。これは局所慣性系の定義と共存しない。実際、トーションに $g_{\nu\beta}A^{\beta}_{\mu\alpha} + g_{\mu\beta}A^{\beta}_{\nu\alpha}$ が零でない成分（=: 歪トーション）があれば式（5.7）は成り立たないので歪トーションはこの仮定においてゼロである。他方、それが零である成分（渦トーション [2]）は局所慣性系とは矛盾しない。次に物体の運動を考える。弱い等価原理を仮定すれば物体に働く重力は同様に観測者にも働くので慣性力が重力を打ち消すことが可能である。この時、アインシュタインの等価原理によって局所慣性系を仮定（歪トーションが零）を仮定すると、その軌跡は測地線となる事を示す。

局所慣性系の基底ベクトル $\overline{\mathbf{E}}_\alpha$ に対して、双対基底を $\bar{e}^\alpha$ と書く事にする。そのような座標系から見て外力を受けずに運動する物体は慣性運動をしているので、速度ベクトルを $\mathbf{V}$ とすると系の自由粒子の運動方程式は $d\overline{V}^\alpha/d\tau = 0$ である。ただし、τ は特殊相対性理論によるとミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ によって

$$d\tau^2 = -\eta^{\mu\nu}\mathbf{E}_\mu\mathbf{E}_\nu \tag{5.11}$$

と与えられている落下する物体に沿って計った固有時である。

これを今度は一般の座標系 $\mathbf{E}_\mu$ で見ることにする。

$$0 = \frac{d\overline{V}^\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, \mathbf{V}\rangle = \frac{d}{d\tau}\langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, V^\mu\mathbf{E}_\mu\rangle \tag{5.12}$$

$$= \langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, \mathbf{E}_\mu\rangle\frac{dV^\mu}{d\tau} + V^\mu\frac{d}{d\tau}\langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, \mathbf{E}_\mu\rangle \tag{5.13}$$

$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^\mu\mathbf{E}_\mu$ であるので

$$= \langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, \mathbf{E}_\mu\rangle\frac{dV^\mu}{d\tau} + V^\mu V^\nu\mathbf{E}_\nu(\langle\overline{\mathbf{e}}^\alpha, \mathbf{E}_\mu\rangle) \tag{5.14}$$

両辺に $\langle\mathbf{e}^\lambda, \overline{\mathbf{E}}_\alpha\rangle = \overline{\Lambda}^\lambda_\alpha$ をかけて α で和をとる。

$$0 = \frac{dV^\lambda}{d\tau} + V^\mu V^\nu\mathbf{E}_\nu((\overline{\Lambda^{-1}})^\alpha_\mu)\overline{\Lambda}^\lambda_\alpha \tag{5.15}$$

$$= \frac{dV^\lambda}{d\tau} - V^\mu V^\nu\mathbf{E}_\nu(\Lambda^\lambda_\alpha)(\overline{\Lambda}^{-1})^\alpha_\mu \tag{5.16}$$

$$= \frac{dV^\lambda}{d\tau} + V^\mu V^\nu\overline{\Gamma}^\lambda_{(\mu\nu)} \tag{5.17}$$

$$= \frac{dV^\lambda}{d\tau} + V^\mu V^\nu(\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} - \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\nu\beta}c^\beta_{\mu\alpha} + g_{\mu\beta}c^\beta_{\nu\alpha})) \tag{5.18}$$

[2]完全反対称テンソルに比例する成分である。

と粒子の軌道が測地線方程式（4.24）として与えられる。このように測地線方程式は接続の対称部分しか寄与しないので、歪トーションが零であれば関与する接続の成分は基底の選び方で消すことが出来るので等速直線運動となる。一方、物理理論一般についてはたとえ渦トーションであっても、垂直方向へのベクトルの平行移動に寄与してしまうので、マクスウェル理論のような反対称微分のある理論は慣性系のそれにはなりえない。

前章からの流れを整理すれば、

- 一般相対性原理→接続が系の性質と幾何を表す。
- 弱い等価原理→重力の運動への寄与は接続で決まる。
- 局所慣性系→歪トーションは零、運動は測地線。
- アインシュタインの等価原理→渦トーションは零→レヴィチヴィタ接続。

アインシュタインの等価原理を全ての物理法則について重力の影響が局所的に消去できると言ってしまっても良い。

5.1.2 測地線の長さ

本小節では前小節で表れた測地線が確かに最短距離（最長距離）を与え測地線と呼ぶべきものであることを示す。

曲線の長さは τ を任意のパラメータとして

$$l = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}d\tau \tag{5.19}$$

変分をとると

$$\delta l = \int \left[g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]^{-1/2}\left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]d\tau \tag{5.20}$$

最初の因子は $ds/d\tau$ なので

$$\delta l = \int \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\delta x^\lambda\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} + g_{\mu\nu}\frac{d\delta x^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]ds \tag{5.21}$$

第二項で部分積分すれば

$$\delta l = \int \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} - g_{\lambda\nu}\frac{d^2x^\nu}{ds^2}\right]\delta x^\lambda ds \tag{5.22}$$

これは、

$$\delta l = -\int \left[\left\{ \begin{array}{c} \nu \\ \alpha\mu \end{array} \right\} \frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} + \frac{d^2x^\nu}{ds^2} \right] g_{\lambda\nu}\delta x^\lambda ds \tag{5.23}$$

つまり最小の長さ[3]を与える曲線は粒子の運動を与える。これをもって改めて「測地線」と呼ぶこともある。平行移動から定義した「測地線」に比べて本来の意味では、こちらが妥当であるかもしれない。また二つの定義は歪トーションの存在するときには一致しないが、局所慣性系の存在の元では当然一致する。

等価原理に内在する主張

局所慣性系が取れる⇒歪トーションが存在しない

を

試験粒子は測地線に沿う。この時距離は最小である。

と言い換えることができる。

我々が互いの運動状態にだけ興味があるとすれば、局所慣性系 $\overline{\mathbf{E}}_\mu$ での等速直線運動を加速系である一般の $\mathbf{E}_\mu$ から見れば慣性力 $\overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ を受けていると見る。そしてこれが空間の性質を携えた $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ と同じものであると考えれば我々は曲がった空間の中を運動しているという事になる。ところで、弱い等価原理によれば全て重力の運動への影響はこのように理解する事が出来るので、空間の曲がりと重力は等価であると考えられる。

こうして曲がった空間を記述するために定義された接続 Γ と、重力系の局所慣性系を与えるために物体に働く慣性力を記述している $\overline{\Gamma}$ とは一致しているが、それらを同じものだと主張する事には、矛盾は無いが直接の根拠がないともいえる。つまり、「リーマン幾何学と重力理論が等価である」、とか「空間が重力によって曲げられる」といった命題は、「原理」でありそれ自体立証できるものでは無い。

5.2 弱場での物体の運動

平坦な時空からほんの少し変動した時空を考える。

今 $\overline{\mathbf{E}}_\alpha$ を局所慣性系であるとする。 観測者の一般座標における基底ベクトルを $\mathbf{E}_\mu$ とすれば変換 $\overline{\mathbf{E}}_\alpha = \overline{\Lambda}^\mu_\alpha \mathbf{E}_\mu$ は一般に一次変換である。ここで $\mathbf{E}_\mu$ がある時空の点でのみ、やはり慣性系（＝正規直交系）であるなら、その時空の一点に

[3]この主張は大いに間違っている。ユークリッド符号である空間では無くローレンツ符号である時空を考えれば時間的測地線は最大長さの世界曲線である。この事は特異点定理などの時空の因果構造を考えるうえで重要になるが、ここでは論理の相似性から問題視しない。

おいては $\overline{\Lambda}$ は相対速度 $\mathbf{v}$ で定義されて、ローレンツ変換である。この点から少し離れた点では、局所慣性系からのずれが発生する。このずれは重力の効果であるが空間の非等方性や歪み、回転は高次効果で小さいと無視する。すると弱場であり、非相対論的速度であるとすれば

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-|\mathbf{v}(0)|^2}}$ とおいて

$$\overline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma(1+\phi(x_i)) & -v^x(0)\gamma & -v^y(0)\gamma & -v^z(0)\gamma \\ -v_x(0)\gamma & & & \\ -v_y(0)\gamma & & \left(\delta^i_j + \frac{(\gamma-1)v^i v_j}{|\mathbf{v}(0)|^2}\right)(1-\phi(x_i)) & \\ -v_z(0)\gamma & & & \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1+\phi(x_i)+|\mathbf{v}(0)|/2 & -v^x(0) & -v^y(0) & -v^z(0) \\ -v_x(0) & & & \\ -v_y(0) & & (1-\phi(x_i))\delta^i_j + v^i v_j/2 & \\ -v_z(0) & & & \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

$$\sim \Lambda_0 - \eta\phi(x_i) \tag{5.26}$$

Λ_0 は相対速度 $\mathbf{v}$ についてのローレンツ変換の低速近似である。ただし、v を微小な量として場の強度は Newton ポテンシャルの類推から $\phi \sim v^2$ とした。δ_{ij} の前の因子は (00) 成分の近似的に逆数であるが、これは空間の歪みをなるべく小さく見えるように調整している。Newton 的見方では見かけの速度は重力によって遅くなる。

したがって計量テンソルは

$$g = \overline{\Lambda}\eta\overline{\Lambda} \sim \Lambda_0\eta\Lambda_0 - 2\eta\phi(x_i)\eta\Lambda_0 + \eta\eta\eta\phi(x_i)^2 \tag{5.27}$$

$$\sim \eta - 2\phi(x_i)\Lambda_0 \tag{5.28}$$

v^3 以上の項を小さいとして無視する。まったく重力の影響が無い時に座標基底を使えば $\mathbf{E}_\mu = (\partial/\partial x^\mu)$、$\mathbf{e}^\mu = (dx^\mu)$ であるから、そのまま座標基底を使えば、

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1+2\phi(x_i))dt^2 + (1-2\phi(x_i))(dx^2+dy^2+dz^2) \tag{5.29}$$

となる。この時空、座標系における $\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \overline{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$ のゼロでない成分は

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \Gamma^y_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \Gamma^z_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial z}, \Gamma^t_{tx} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}, \Gamma^t_{ty} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial y}, \Gamma^t_{tz} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{5.30}$$

$$\Gamma^x_{ii} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \Gamma^y_{ii} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \Gamma^z_{ii} = -\frac{\partial\phi}{\partial z}, \Gamma^i_{ix} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}, \Gamma^i_{iy} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial y}, \Gamma^i_{iz} \simeq \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{5.31}$$

したがって測地線の方程式は最低次において

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \nabla\phi \cdot \mathbf{v}\frac{dt}{d\tau} = 0 \tag{5.32}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \nabla\phi(\frac{dt}{d\tau})^2 = 0 \tag{5.33}$$

上段の式より ϕ の零次で $t \sim \tau$ とする。$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ であるので

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla\phi \simeq 0, \quad \mathbf{F} = -m\nabla\phi \tag{5.34}$$

等価原理より、粒子の運動は測地線に沿うことになっているのでこれを Newton の運動方程式と比べると、ϕ は万有引力のポテンシャルであると考えられる。

ここで、一般相対性原理を考慮すれば、重力場はテンソルであらわされている筈である。物理的な要請として、

- 計量について二回微分までを含む
- 四元的な保存則を満たす

であるものを考える。そのようなテンソルはアインシュタインテンソルしかない。実際アインシュタインテンソルはビアンキ恒等式

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0 \tag{5.35}$$

を満たしていて、これは四元ベクトル $J^\mu = G^\mu_\nu u^\nu$ の保存則

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{5.36}$$

を与える。

5.3 エネルギー運動量テンソル

ところで、万有引力の法則に於いてポテンシャル ϕ は

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{5.37}$$

で与えられている。計量 (5.29) についてアインシュタインテンソルを求めると

$$G^t_t = -\frac{1}{2}\nabla^2\phi \tag{5.38}$$

一方物質密度が ρ で表され (5.36) のような保存則を満たすことにすると、それは連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \tag{5.39}$$

であることから、J^μ の定義式で $u^\mu = (\partial_t)^\mu$ $(\mathbf{u} = (\partial_\mathbf{t}) = \mathbf{E_t})$ とすれば求めるべき方程式の右辺は

$$G_t^0 = -k\rho = -kJ^0, \tag{5.40}$$
$$G_t^i \vec{E}_i = -k\rho\vec{v} = -k\vec{J} \quad i = 1,2,3 \tag{5.41}$$

であることがわかる。相対性原理の精神から u^μ は何を考えてもいいので、それを一般に $\mathbf{E}^\mu, \mu = t, 1, 2, 3$ として、流体力学における応力テンソルを $P_j^i = \mathbf{P^i}(\mathbf{E_j})$ として導入し、$T(1,1)$ テンソル T_ν^μ

$$T_\nu^0 = T^0(\mathbf{E}_\nu) = (-\rho(\partial_t), -\rho v^j \mathbf{E_j}), \tag{5.42}$$
$$T_\nu^i = T^i(\mathbf{E}_\nu) = (\rho v^i(\partial_t), P_j^i = \mathbf{P^i}(\mathbf{E_j})) \tag{5.43}$$

を考えれば、右辺についてのテンソルとしての保存則 $\nabla_\mu T_i^\mu = 0$ は実際、オイラーの方程式

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\ p - \rho\ \mathbf{grad}\ \phi \tag{5.44}$$

を与える。慣性系での議論を行ったが、相対性原理より、関係式はテンソル関係式として一般座標系に一般化されるので

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \tag{5.45}$$

最後に k を決定するためには (5.38) を代入して (5.37) と一致するようにすればよい。こうして

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{5.46}$$

を得る。$G = (6.670 \pm 0.005) \times 10^{-8} cm^3 g^{-1} s^{-1}$ である。

第6章　対称性と計量テンソル

リー微分を定義する。これは微分同相写像（アクティブ）を受けてどのように計量テンソルが変換を受けるかを表している。プルバックの定義からテンソルである事が確かめられる。

ゲージ対称性を考える。本来座標変換の事で微分同相写像（パッシブ）である。つまり変化分はテンソルではない。

一般に計量テンソルは微分同相写像によって不変ではないがアインシュタイン方程式は不変であることが確かめられる。この事と一般共変性は実は同値である事は、例えばビアンキアイデンティティが保証している。

6.1　微分同相写像と座標変換

$$\psi : U \mapsto U \quad (U \subset M) \tag{6.1}$$

$$\tag{6.2}$$

第7章　Schwarzschild解

本章では、球対称な星の周りに生じる重力場についてしらべる。星の周りを取り扱うので、この領域において物質の存在しない真空であると仮定する。実は、このような条件下で時空は時間的に変化しない事が証明できるのだが、ここでは、そのような事は気にしないで、十分重力崩壊が進行して定常化した星の周りの静的な重力場を始めから取り扱う。

7.1　球対称真空解

球対称で静的の時空を考える。角度座標は球対称性から自然に決まるものを選ぶ。角度座標に向けた局所慣性系の基底 $\overline{\mathbf{e}}^{\theta\phi}$ と一般の基底 $\mathbf{e}^{\theta\phi}$ は同じ向きに取れる。動径座標の選択は自明でないが、星の中心を原点として考えた球面の面積 S から $S \equiv 4\pi r^2$ と定義すると、$\mathbf{e}^{\theta} = (d\theta)$、$\mathbf{e}^{\phi} = (d\phi)$ に対して $\overline{\mathbf{e}^{\theta}} = r\mathbf{e}^{\theta}$、$\overline{\mathbf{e}^{\phi}} = r\sin\theta\mathbf{e}^{\phi}$ とすれば局所慣性系が正規化される。

球対称性から静的時空であれば

$$\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{t}}} = a_{tt}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} + a_{tr}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} \tag{7.1}$$

$$\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{r}}} = a_{rt}\mathbf{e}^{\mathbf{t}} + a_{rr}\mathbf{e}^{\mathbf{r}} \tag{7.2}$$

であるが、対角化することができるので $\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{t}}} = \sqrt{f(r)}\mathbf{e}^{\mathbf{t}}$, $\overline{\mathbf{e}^{\mathbf{r}}} = \sqrt{h(r)}\mathbf{e}^{\mathbf{r}}$ とする。局所慣性系の計量は $\eta_{\mu\nu}$ である一方 $\mathbf{e}^{\mathbf{t}} = (dt)$、$\mathbf{e}^{\mathbf{r}} = (dr)$ として全て座標基底で表せば計量テンソルは

$$\eta_{\mu\nu}\overline{\mathbf{e}^{\mu}\mathbf{e}^{\nu}} = g_{\mu\nu}(dx^{\mu})(dx^{\nu}) = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.3}$$

で与えられる。

逆行列 $g^{\mu\nu}$ を行列で書くと

$$\begin{pmatrix} -1/f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

この計量テンソルについての $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ は

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{h(r)},\ \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}\frac{h'(r)}{h(r)},\ \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{h(r)},\ \Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{h(r)}, \tag{7.5}$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)},\ \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r},\ \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta,\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta \tag{7.6}$$

リッチテンソルは

$$R^t_t = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] - (rfh)^{-1}f' \tag{7.7}$$

$$R^r_r = -\frac{1}{2}(fh)^{-1/2}\frac{d}{dr}[(fh)^{-1/2}f'] + (rh^2)^{-1}h' \tag{7.8}$$

$$R^\theta_\theta = R^\phi_\phi = -\frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' + \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1-h^{-1}) \tag{7.9}$$

である。真空のアインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad \longrightarrow R = 0 \tag{7.10}$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{7.11}$$

である。

$$-R^t_t + R^r_r = (rfh)^{-1}f' + (rh^2)^{-1}h' \tag{7.12}$$

$$= (rh)^{-1}(f'/f + h'/h) = 0 \tag{7.13}$$

であるので、

$$f = Kh^{-1} \tag{7.14}$$

がえられる。K は定数であるが、適当に時間を取り替えれば $K = 1$ にすることができる。

R^t_t に代入して

$$\frac{1}{2}f'' + f'/r = 0 \tag{7.15}$$

これは簡単に積分できて

$$f' = \frac{B}{r^2}, f = A - \frac{B}{r} \tag{7.16}$$

さらに R^θ_θ も零であるためには、$A = 1$ である。ここで、弱場の場合については $g_{tt} = 1 + 2\phi$、さらに万有引力の法則 $\phi = -\frac{GM}{r}$ より $B = 2GM$ である。結局、計量テンソルは

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.17}$$

これはシュバルツシルド計量と呼ばれる。また万有引力との類推から M は重力質量と考えられる。

この計量テンソルについて本質的なのは

$$g_{tt} = -(1 - 2GM/r) \tag{7.18}$$

という因子である。この因子には $r = 0,\ 2GM$ という二つの特徴的な半径がある。局所慣性系への局所的な座標変換を考えると、どちらも正則な座標変換が得られないので、局所慣性系の存在が非自明である。

これは、前者と後者で事情が全く違う。まず、前者について考えることにする。改めて、R^t_t に代入すると

$$R^t_t = -\frac{1}{2}f'' - f'/r = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r f = -\nabla^2 \frac{GM}{r} = 4\pi GM\delta^3(r) \tag{7.19}$$

ここで、三次元ラプラシアンのグリーン関数 $-\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = \delta^3(r)$ を使った。

つまり、原点で曲率はデルタ関数のように発散している。この解は、原点では時空自体が特異点になっているといえる。もちろん、局所慣性系が取れないどころかあらゆる物理法則を適用することは出来ない。

一方後者の場合は曲率の発散などは起こっておらず、局所的には時空は正則なはずである。局所慣性系への正則な座標変換が存在しない理由は、シュバルツシルド計量を与えた座標がこの地点では適当でなく、局所慣性系との間に、無限の時間座標のローレンツ収縮が起こっている考えられる。このことは、$0 < r < 2GM$ で、g_{tt}, g_{rr} の符号が入れ替わって時間座標と動径座標の役割が入れ替わっていることからも容易に想像できる。

このことは次の章で導入するクルスカル座標によって具体的に明らかになる。

7.2 Kuruskal 座標と事象の地平線

前節で求めたシュバルツシルド計量をもつ時空について座標変換を考える。特に、前節の座標では $r < 2GM$ で、時間座標と動径座標の役割が入れ替わってしまっている。この問題を避けるためには時間と動径の部分の計量が

$$g'_{AB}dx^A dx^B = F(T, R)(-dT^2 + dR^2) \tag{7.20}$$

で F の符号が $r = 2GM$ を挟んでも一定であるものを求めればよい。式（7.20）の形であるものを共形平坦と呼ぶ。

共形平坦であれば、時空の未来、過去、空間方向そして光的方向が全く平坦な時空と同じように記述される。図 7.1

図のように、ある点の未来はそこから光より遅い粒子を飛ばしたときに将来到達することのできる領域である。また、過去とは観測することの出来る光よ

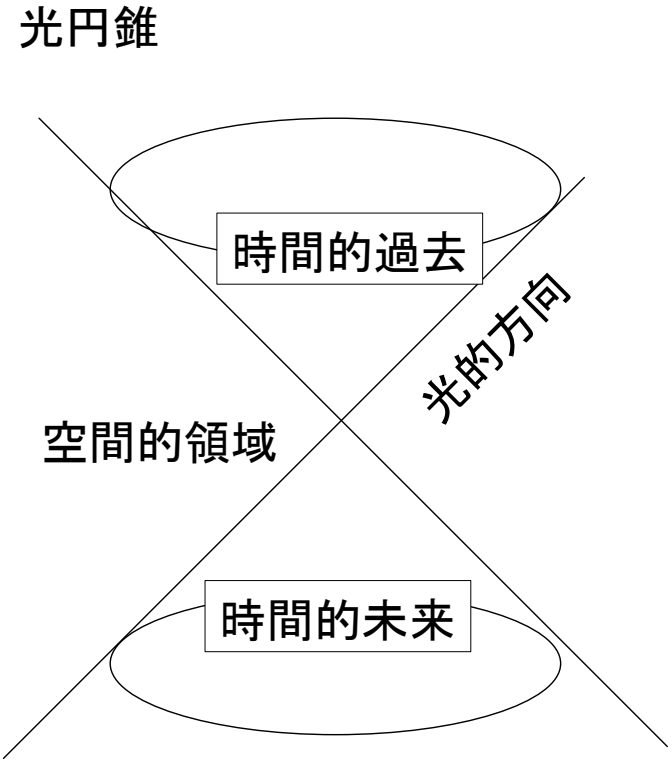

図 7.1: 光円錐と時間順序

り遅い粒子の出発したと考えられる領域である。光円錐とは光でぎりぎり到達することの出来る過去と未来であり、上記以外の領域を空間的領域と呼ぶ。これらの領域は光測地線によって区切られているが、光測地線は共形平坦なら

$$T = -R, \quad T = R$$

で得られる。これは平坦な時空（ミンコフスキー時空）のそれと一致しているので共形平坦座標において時空の局所的な因果的性質はミンコフスキー時空に一致している。これは、共形平坦である座標の重要な性質である。特にブラックホールのような時空を調べるときにはもっとも重要視される。局所的と書いたのは、この共形平坦な座標がどういう時空領域で有効であるかは自明でないからである。具体的にはこの後シュバルツシルド時空について明らかになる。

共形平坦な計量は r 座標を変えれば簡単に得られる。

$$\begin{aligned} dr \mapsto dr_* &= dr/(1-2GM/r), \quad r_* = r + 2GM\log(r-2GM) && (7.21)\\ g'_{AB}dx^A dx^B &= (1-2GM/r)(-dt^2 + dr_*^2) && (7.22) \end{aligned}$$

ここで、r_* の変域 $(-\infty, \infty)$ は log の性質から $r < 2GM$ の部分に限られている。しかしこれは関数の性質によるものなので、適当に解析接続することで変域を拡張することは出来る。具体的には、光的座標を採用して

$$\begin{aligned} u &= t + r_*,\ v = t - r_* && (7.23)\\ g'_{AB}dx^A dx^B &= (1-2GM/r)(-dudv) && (7.24) \end{aligned}$$

$r_* \to -\infty$ で $t \to \infty$ では、v が ∞ に発散、$r_* \to -\infty$ で $t \to -\infty$ では、u が $-\infty$ に発散する。それぞれ

$$\begin{aligned} (U &= e^{u/4GM}, V = e^{-v/4GM}), && (7.25)\\ dU &= (e^{u/4GM}/4GM)du, \quad dV = -(e^{-v/4GM}/4GM)dv && (7.26) \end{aligned}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} g'_{AB}dx^A dx^B &= (1-2GM/r)e^{-(u-v)/4GM}(4GM)^2(dUdV) && (7.27)\\ &= 16G^2M^2(1-2GM/r)e^{-r_*/2GM}(dUdV) && (7.28) \end{aligned}$$

$r_*(r)$ (7.21) を代入、光的座標から共形平坦座標 $T = (U-V)/2, R = (U+V)/2$ に戻すと、

$$\begin{aligned} & g'_{AB}dx^A dx^B && (7.29)\\ =\ & 16G^2M^2(1-2GM/r)e^{-r/2GM-\log(r-2GM)}(-dT^2 + dR^2) && (7.30)\\ =\ & \frac{16G^2M^2}{r}e^{-r/2GM}(-dT^2 + dR^2) && (7.31) \end{aligned}$$

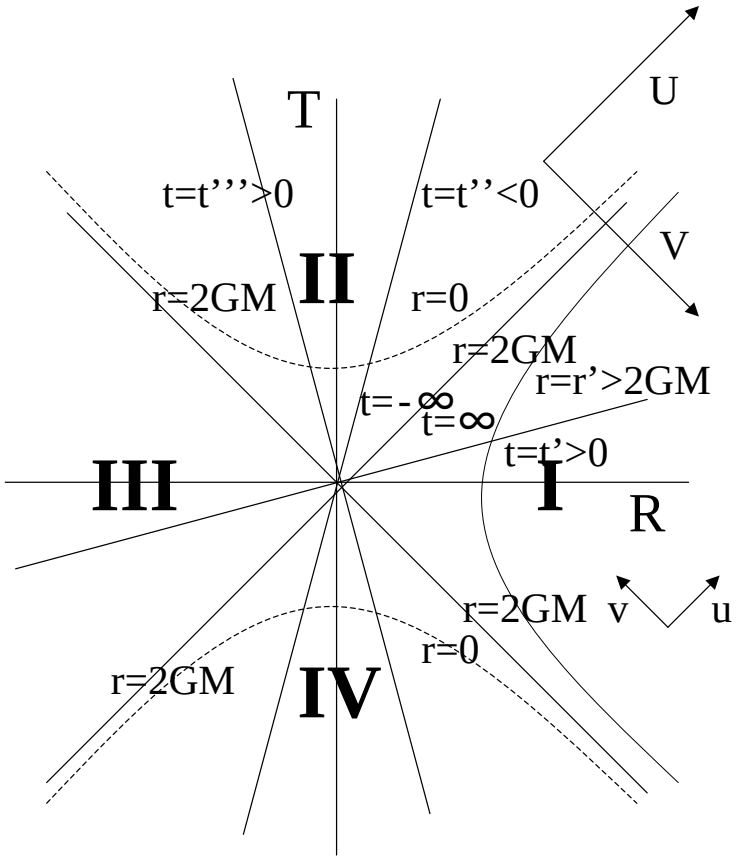
T
U
V
t=t’’’>0
t=t’’<0
II
r=2GM
r=0
r=2GM
r=r’>2GM
t=-∞
t=∞
t=t’>0
III
I
R
r=2GM
v
u
r=0
r=2GM
IV

図 7.2: クルスカル座標

と共形平坦で拡張された計量が得られる。この座標 (T,R) ともともとの座標 (t,r) との関係は

$$T^2 - R^2 = -UV \tag{7.32}$$

$$= -e(u-v)/4GM = -e^{r_*/2GM} = -e^{r/2GM}(r-2GM), \tag{7.33}$$

$$\frac{T}{R} = \frac{U-V}{U+V} = \frac{e^{u/4GM} - e^{-v/4GM}}{e^{u/4GM} + e^{-v/4GM}} = \tanh(\frac{t}{4GM}) \tag{7.34}$$

で与えられる。この関係は $r > 2GM$ でのものであるが、$r < 2GM$ では解析接続されていて

$$T^2 - R^2 = -UV \tag{7.35}$$

$$= -e(u-v)/4GM = -e^{r_*/2GM} = -e^{r/2GM}(r-2GM), \tag{7.36}$$

$$\frac{R}{T} = \frac{U-V}{U+V} = \frac{e^{u/4GM} - e^{-v/4GM}}{e^{u/4GM} + e^{-v/4GM}} = \tanh(\frac{t}{4GM}) \tag{7.37}$$

で与えられる。特異点 $r = 0$ は双曲線 $T^2 - R^2 = 2GM$、$r = 2GM$ は $T = R, T = -R$ に対応する。図 7.2 を参照。

図では (T,R) 空間が四つの象限に分かれている。第 1 の象限が遠方の観測者がいるもともとの領域。v 座標についての拡張された領域が第二象限、u の拡張は第四象限を与えている。同じような拡張がさらに第三象限へ可能であるので解析的な完全性を期すため拡張しているが、この領域の物理的意味を見出すことは困難である。

7.3 事象の地平線と赤方偏移

前節で得られたクルスカル座標を使ってシュバルツシルド時空の因果的な構造を調べることにする。

まず我々、遠方の観測者がいるのは第一象限の右上にいると考えられる。上方にいるのは我々はこの時空についての情報を過去からの光の信号として受け取るので十分未来にいると考える。

ただし、この図において $T = R$ の線より上方は $r < 2GM$ で星の遠方ではないので我々は無限の未来の極限で $T = R$ に達すると考える。

さて、ここで $r > 2GM$ の領域から $r < 2GM$ の領域へと侵入していく物体を考える。物体は光よりは速度が遅いのでその軌道は上方４５度の角度である光円錐の内側に限られている。するとこの物体は物体自身の固有時間で測って有限の時間で特異点（$r = 0, T^2 - R^2 = 2GM$）に到達する。

さらに、一度第二象限の $r < 2GM$ である領域に入ってしまうとそこからは４５度上方の光の速度で運動しても必ず特異点にぶつかってしまい、$r > 2GM$ の領域に出ることは出来ない。

さて、このような物体を遠方にいる我々が観察するとどのように見えるのであろうか？

まず、$r = r_1 > 2GM$ で静止している物体が放出する光を遠方で $r = r_0 >> 2GM$ である観測者が観測する。

この場合は (7.22) で考えると良い。共形平坦な座標なので光線は４５度の方向に進行する。物体はその固有時についての振動数で光をだすが、一回振動するのにかかる時間 (周期）δt を一定にして伝播することは、４５度の平行な光線を δt ずらして書けば理解できる。

光源物体の固有時は

$$\delta\tau = \sqrt{-g'_{tt}(r = r_1)}\delta t = \sqrt{1 - 2GM/r_1}\delta t \tag{7.38}$$

同様に観測者の固有時は

$$\delta\tau' = \sqrt{-g'_{tt}(r = r_0)}\delta t = \sqrt{1 - 2GM/r_0}\delta t \tag{7.39}$$

である。振動数は周期の逆数であるので光源、観測者それぞれでの振動数を ν,ν_0 とすると

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\delta\tau}{\delta\tau'} = \sqrt{\frac{1 - 2GM/r_1}{1 - 2GM/r_0}} \tag{7.40}$$

$r_1 < r_0$ であれば $\nu_0 < \nu$ であり赤い方に観測光はずれる。これを重力赤方偏移と呼ぶ。$r_1 \to 2GM$ で無限に赤方偏移する。

次に $r < 2GM$ の領域へ落下する物体を遠方で観測する事を考える。この場合はクルスカル座標で考える。たとえば、$R = const.$ である物体を考える。この物体の発する光も、物体の固有時間についての振動数で放出される。

$$\delta\tau = \sqrt{-g_{TT}(r)}\delta T = \frac{4GM}{\sqrt{r}}e^{-r/4GM}\delta T \tag{7.41}$$

一方、観測者 $(t, r = r_0 >> 2GM)$ はクルスカル座標で (T', R') として

$$dr_0 = T'dT' - R'dR' = 0 \tag{7.42}$$

$$\delta R' = \frac{T'}{R'}\delta T' = \tanh\frac{t}{4GM}\delta T' \tag{7.43}$$

$$\tag{7.44}$$

の軌道を取る。図 7.3 より、

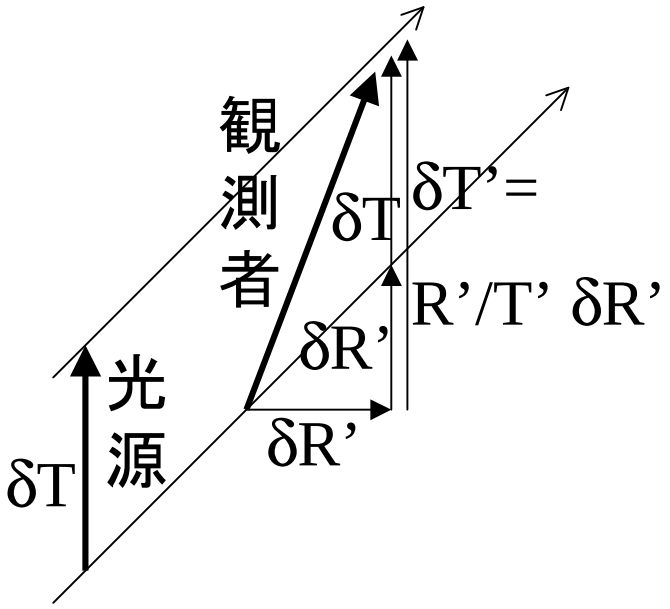

図 7.3: 観測者と光源

$$\delta T' = \delta T + \delta R' \tag{7.45}$$

$$\delta T = (1 - \tanh \frac{t}{4GM})\delta T' \tag{7.46}$$

δT 一定で光は伝わるので受け取るときの固有時は、半径 $r = r_2$ で光を放出して時刻 t_0 半径 $r_0 = const.$ の観測者に到達したとするとたとすると

$$\delta\tau' = \sqrt{-g_{TT}\delta T'^2 - g_{RR}\delta R'^2} = \sqrt{\frac{1 + \tanh \frac{t_0}{4GM}}{1 - \tanh \frac{t_0}{4GM}}}\sqrt{-g_{TT}(r_0)}\delta T \tag{7.47}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \tanh \frac{t_0}{4GM}}{1 - \tanh \frac{t_0}{4GM}}}\sqrt{\frac{-g_{TT}(r_0)}{-g_{TT}(r_2)}}\delta\tau \tag{7.48}$$

クルスカル図 7.2 より、物体が $r = 2GM$ に近づくときその光を受け取る観測者の時刻 t_0 は無限大に近づく。g_{TT} は r が有限値である限り有限であるので、r_0 を有限の大きな値にとれば、十分 $r = 2GM$ に近づいた物体からの光は無限の赤方偏移を受ける。

$$\delta\tau' \propto \frac{\delta\tau}{\sqrt{1 - \tanh \frac{t_0 1}{4GM}}} \tag{7.49}$$

である。落下する物体の時間は $r = 2GM$ 付近で遠方からは無限にゆっくり進んでいるように見える。つまり、物体が $r = 2GM$ に近づくと物体の時間は遠方から見てどんどん遅れて行き $r = 2GM$ に到達するのには無限の時間がかかる。したがって遠方の観測者は未来永劫、物体が $r = 2GM$ の内側に落下するのを見ることは出来ない。

振動数 ν で光が放出されるとすると観測者は

$$\nu\delta\tau = \nu_0\delta\tau', \tag{7.50}$$

$$\nu_0 \propto \nu\sqrt{1 - \tanh \frac{t_1}{4GM}} \tag{7.51}$$

で無限に赤方偏移した光を受け取る。物体が落下して行くと物体の色は赤くて暗くずれていき、$r = 2GM$ に到達するのを見ることはこの意味でも勿論できない。

このように $r = 2GM$ にはわれわれの観測することの出来る限界という物理的意味がある。このような境界面を事象の地平線と呼ぶ。さらに事象の地平線に囲まれた領域をブラックホールと呼ぶ。

逆に物体の時間では物体は有限の時間で $r = 2GM$ に到達し、さらに有限の時間で特異点 $r = 0$ に到達する。

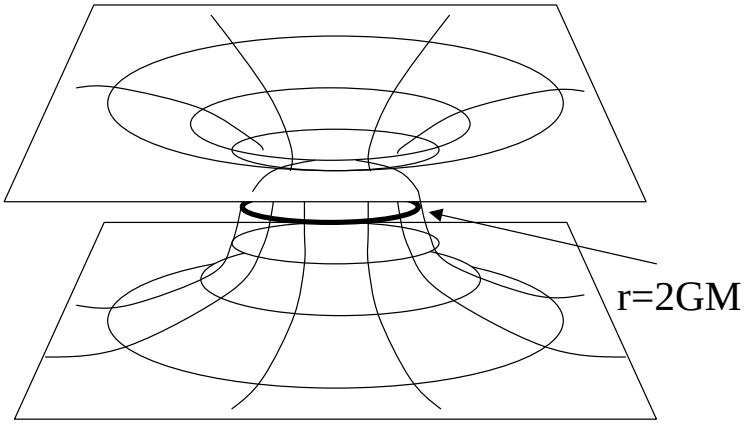

図 7.4: ブラックホールの橋

実際は物体は $r = 2GM$ の近辺では、各部分の感じる重力が大きく変わるのでそのままの形状を保っていることはできない。半径方向に引き伸ばされて剛体は破壊されてしまう。->レポート

最後にブラックホール時空の形について考えてみる。$t = 0$ の断面は

$$\frac{dr^2}{1 - 2GM/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7.52}$$

平坦四次元空間 X_1, r, θ, ϕ の中の曲面 $X_1 = f(r)$ がこの断面と同じものであると仮定すると。$dX^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ に代入して上の三次元計量を与えればよい。

$$(f'^2 + 1)dr^2 = \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} \tag{7.53}$$

$$f' = \sqrt{\frac{2GM}{r - 2GM}} \tag{7.54}$$

$$f = 2\sqrt{2GM}\sqrt{r - 2GM} \tag{7.55}$$

この曲面を図示すると、

明らかに $r \to \infty$ で空間は平坦になっている。また、図の下方は第三象限であり、このように第一象限とつながっていることがわかる、これをアインシュタイン＝ローゼンの橋と呼ぶ。

第8章　膨張宇宙

本章では、我々の宇宙全体に対して一般相対論を適応することを試みる。ハッブルが発見したように我々の宇宙は膨張しているのだが、そのこともアインシュタイン方程式によって説明される。

8.1　一様等方空間

まず、われわれの宇宙を考えるにあたって地球からの観測が宇宙のどの方向に対しても大きな違いの無いことに注目する。さらに、我々のいる地球や太陽系が宇宙の中の特別な場所ではないことを仮定すると（宇宙原理）宇宙はどの地点から見ても等方であることがわかる。

このような空間を一様等方空間と呼ぶ。一様等方空間には正曲率、平坦、負曲率の場合がある。

一様等方な空間を考える簡単な方法は、四次元空間の中の超曲面として記述する方法である。正曲率の場合は四次元ユークリッド空間、負曲率の場合は四次元ミンコフスキー空間の中の三次元擬球面として実現される。

四次元の座標を X_1, X_2, X_3, X_4 とすると四次元空間の計量は

$$\eta_{ij} dx^i dx^j = \pm dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 \tag{8.1}$$

擬球面の方程式は

$$\pm X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1 \tag{8.2}$$

これを実現する三次元座標を考えると正曲率の場合は

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos\chi && (8.3)\\ X_2 &= \sin\chi\cos\theta && (8.4)\\ X_3 &= \sin\chi\sin\theta\cos\phi && (8.5)\\ X_4 &= \sin\chi\sin\theta\sin\phi && (8.6)\\ & && (8.7) \end{aligned}$$

負曲率の場合は

$$X_1 = \cosh\chi \tag{8.8}$$
$$X_2 = \sinh\chi\cos\theta \tag{8.9}$$
$$X_3 = \sinh\chi\sin\theta\cos\phi \tag{8.10}$$
$$X_4 = \sinh\chi\sin\theta\sin\phi \tag{8.11}$$
$$\tag{8.12}$$

とすればよいことがわかる。これをそれぞれの計量に代入すれば直接

$$h_{ij}dx^i dx^j = d\chi^2 + \left\{ \begin{array}{c} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array} \right\} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{8.13}$$

を得る事ができる。ただし、括弧の中は上から正曲率、平坦、負曲率の場合である。

8.2 フリードマン方程式

時空の計量を考える。宇宙はいつの時刻も前節で考えたように一様等方であるとすると、適当な時空の計量テンソルは以下のように与えられる。

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2(d\chi^2 + \left\{ \begin{array}{c} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array} \right\} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{8.14}$$

ここで、我々は宇宙が時間とともにその大きさを変える可能性を考慮している。そのような時は、内積の値も大きくなるはずなので宇宙の大きさのスケール因子を $a(t)$ として取り入れている。たとえば、正曲率の場合は宇宙は三次元球面であり、その半径は $a(t)$ で変動している。

この計量についてのアインシュタイン方程式は

$$-G^t_t/3 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{8.15}$$
$$-(-G^t_t + \Sigma_{i=1,2,3}G^i_i)/6 = R^t_t/3 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P) \tag{8.16}$$

ただし、k は正曲率、平坦、負曲率のときにそれぞれ $1, 0, -1$ をとるパラメータである。これをフリードマン方程式、(8.14) で仮定された計量をロバートソン・ウォーカー計量と呼ぶ。

ここで物質は粘性のない完全流体を仮定している。完全流体のエネルギー運動量テンソルは流体が宇宙に対して相対的に運動していないとすると

$$T_{\mu\nu}dx^{\mu}dx\nu = \rho dt^2 + Ph_{ij}dx^i dx^j \tag{8.17}$$

ρ、P はそれぞれ流体のエネルギー密度と圧力である。

物質として典型的に考えられるのは、ダストと輻射の場合である。それぞれエネルギー密度と圧力の関係が状態方程式であたえられ、$P = 0$ と $P = \rho/3$ である。

さて、エネルギー運動量テンソルには保存則があることは前に述べた、この保存則を直接計算すれば

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \tag{8.18}$$

同じ保存則を $G_{\mu\nu}$ も満たすのでこれは (8.15),(8.16) からも導出できる。

状態方程式を代入すれば

ダスト　$\rho a^3 = const.$

輻射　$\rho a^4 = const.$

断熱膨張をしているので温度 T に対して輻射については $\rho \sim T^4$。これは物質の物性から期待されるものになっている。

8.3　宇宙膨張と赤方偏移

ここではまず、前節の方程式を宇宙がダストと輻射それぞれによって満たされている時に解くことにする。この時、注意が必要なのは、物質場の保存則（8.18）ともう一つスケール因子についての方程式があれば解は得られるはずである。しかし方程式は、（8.15）（8.16）二つあるので、一般的にはこの方程式系は解けないはずである。

実のところは、（8.15）の方程式は時間に関する一回微分しか含んでいないので、これは時間に対する二回微分（加速度) を与える普通の力学的方程式ではない。もうひとつの方程式（8.16）は

実際、初期条件に対して（8.15）を課しておけば、あとはその初期条件を（8.16）に従って時間発展させたものは常に（8.15）を満たしている。このことは具体的に確かめることも可能であるし、一般的にアインシュタイン方程式でそのようになっていることがビアンキ恒等式を使えば証明できる。

したがってここでは（8.18)、（8.15）のみを考えれば十分である。

8.3.1　輻射優勢の宇宙

このとき、(8.18) より $\rho = \frac{3}{8\pi}\alpha/a^4$ とおく事にする。(8.15) の解は $k = 0$ の時は簡単で

$$a = (4\alpha)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} \tag{8.19}$$

で与えられる。

また、$k = \pm 1$ の時もそれぞれ、同様の解を得ることはできて

$$a = \sqrt{\alpha}[1 - (1 - t/\sqrt{\alpha})^2]^{1/2} \tag{8.20}$$

$$a = \sqrt{\alpha}[(1 + t/\sqrt{\alpha})^2 - 1]^{1/2} \tag{8.21}$$

である。

8.3.2　ダスト優勢の宇宙

ダストのときも $k = 0$ の時は簡単である。(8.18) より $\rho = \frac{3}{8\pi G}\beta/a^3$ とおく事にすると (8.15) の解は

$$a = (\frac{9\beta}{4})^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \tag{8.22}$$

で与えられる。

$k = \pm 1$ の場合を考えるためには共形時間で考えたほうがいい、あとで有用になるのでロバートソンウォーカー計量の共形（平坦）にする時間座標を導出しておく

$$d\eta = \frac{dt}{a(t)}, \quad \eta = \int \frac{1}{a(t)} dt \tag{8.23}$$

すると方程式 (8.15) は

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 + ka^2 = \beta a \tag{8.24}$$

この方程式は解くことが出来て、

$k = 1$ $a = \frac{1}{2}\beta(1 - \cos\eta)$

$k = -1$ $a = \frac{1}{2}(\cosh\eta - 1)$

である。輻射優勢と共通して言えることは k の符号の負、ゼロ、の場合は永久に膨張を続け、正のときはしかるべき最大膨張のあと宇宙は収縮して最後は特異点になってしまう。

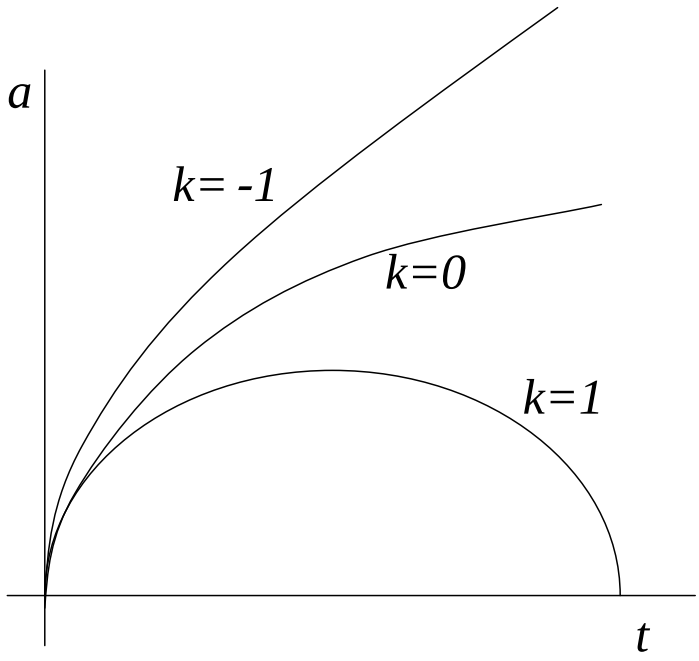

図 8.1: 宇宙の膨張と曲率

8.3.3 宇宙項優勢の宇宙

初期宇宙論において重要になるインフレーション理論で重要になるので宇宙項優勢の場合についても考察を行う。

宇宙項は定数（Λ）であるので宇宙膨張に対しても一定である。フリードマン方程式は

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \tag{8.25}$$

解が

$k = 1 \;\; a = a_0 \cosh Ht$

$k = 0 \;\; a = a_0 e^{Ht}$

$k = -1 \;\; a = a_0 \sinh Ht$

であることは代入することによって容易に確かめられる。ここで $H = \sqrt{\Lambda/3}$ である。この値は一般的に $H = \dot{a}/a$ と定義されハッブル定数（ハッブルパラメータ）と呼ばれる。その宇宙論的意義については次節で明らかになる。

注目すべきことは k の値によらず宇宙膨張が加速的であることである。これは、輻射やダストの場合とは根本的に違うことである。結果、因果的に異なる特徴を有することになるがそれについては次々節で論じる。

8.3.4 赤方偏移

歴史的には宇宙膨張は遠方の銀河の発する光の赤方偏移によって発見された。ここでは、上記のロバートソン・ウォーカー宇宙モデルについての赤方偏移を導出する。

ブラックホールについて述べたように、光は共形座標では平坦な時空と同じように進むので、ここでも共形座標を導入する。ロバートソン・ウォーカー計量については共形時間（式 8.23）を導入すれば良く、新しい計量は

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a(t)^2(-d\eta^2 + d\chi^2 + \left\{ \begin{array}{c} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array} \right\}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{8.26}$$

で与えられる。

ここでは、空間座標系についてそれぞれ静止している観測者（添え字１）と光源（添え字２）の間の光のやり取りを考える。光線は共形時間を一定に保って伝播するので、

$$\delta\eta_1 = \delta\eta_2 \tag{8.27}$$

である。座標時間 δt は静止している観測者、光源について固有時であるので、また、光の振動数は固有時についての振動数なので

$$\frac{1}{z} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{n}{\delta t_1} \Big/ \frac{n}{\delta t_2} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} \tag{8.28}$$

ここで n は注目している時間間隔における振動の回数である。ここに固有時の定義（8.23）を代入すると

$$\frac{1}{z} = \frac{a(t_2)\delta\eta_2}{a(t_1)\delta\eta_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \tag{8.29}$$

となる。観測時刻 t_1 の周りで a を展開すれば

$$a(t_2) \simeq a(t_1) - (t_1 - t_2)\dot{a}(t_1) \tag{8.30}$$

したがって

$$\frac{1}{z} \simeq 1 - \frac{\dot{a}}{a}(t_1 - t_2) \tag{8.31}$$

これを光源の交代によるドップラー効果と解釈することにする。速度 v で遠ざかる光源を観測するときドップラー効果による赤方偏移は光速度を敢えて v_c と書いて

$$\frac{1}{z} = \frac{v_c}{v_c + v} \simeq 1 - \frac{v}{v_c} \tag{8.32}$$

（ただしこの関係式は静止媒質を仮定しているので正確な関係ではなく、ローレンツ不変でもない。速度 v が光速 v_c にくらべれ十分小さいときに成立する。）

したがって光源の見かけの後退速度は

$$v = v_c(t_1 - t_2)\frac{\dot{a}}{a} = l\frac{\dot{a}}{a} \tag{8.33}$$

で与えられる。l は光源と観測者の光路距離である。これは、ハッブルによって発見された遠方の銀河の後退則であり $H = \frac{\dot{a}}{a}$ をハッブル定数と呼ぶ。

8.3.5 地平線

図にあるように宇宙はある有限の時刻に点からはじまって、少なくとも現在までは膨張を続けていると考えられる。したがって、その間に光及びあらゆる物理的影響は有限の距離しか伝わらないはずである。微小座標時間 δt の間に光の伝播する座標距離はその間のスケール因子が一定である範囲で

$$\delta\chi = \delta t/a \tag{8.34}$$

現在の時刻 t_0 でのスケールで測れば、宇宙の誕生から現在までの間に光の進む距離は

$$l_p = a(t_0)\chi = a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} \tag{8.35}$$

輻射優勢、ダスト優勢のように $a(t) \propto t^q,\ (q<1)$ のときは

$$l_p = t_0^q\left[\frac{1}{1-q}t^{1-q}\right]_0^{t_0} = \frac{1}{1-q}t_0 \tag{8.36}$$

で例えば輻射優勢のときは $2t$ で与えられる。この距離より離れた二地点は因果的に連絡していることはありえないのでこの距離はなれた境界を粒子的地平線と呼ぶ。

ここで、ハッブル定数 H を評価しておくと $a(t) \propto t^q,\ (q<1)$ の時、$H = \frac{q}{t}$ である。数係数を別にすれば、宇宙の年齢は $\frac{1}{H}$ 程度、粒子的地平線も $\frac{1}{H}$ 程度である。そういった意味でハッブル定数はもっとも重要な宇宙パラメータといえる。

宇宙の膨張速度が加速的（$a(t) \propto t^q,\ (q>1)$ や指数関数的）な場合この距離は発散してしまっていて意味をなさない。しかしこの時には、ブラックホールのときと同じような事象の地平線が宇宙論的意味で存在する。例えば、宇宙が宇宙項によって支配されていて指数関数的に膨張 $a(t) = a_0e^{Ht}$ している場合を考える。ある時刻 t_1 に光源から出た光が無限の時間をかけて進む距離は時刻 t_1 でのスケールで

$$l_h = a(t_1)\chi = a(t_1)\int_{t_1}^{\infty}\frac{dt}{a(t)} = a_0e^{Ht}[-\frac{1}{H}\frac{1}{a_0}e^{-Ht}]_{t_1}^{\infty} = \frac{1}{H} \tag{8.37}$$

で与えられる。この距離は将来無限の時間をかけても因果的に連絡できない距離であり、この距離の境界を宇宙論的事象の地平線と呼び、この内側だけが因果的な領域であると考えられる。

つまり、加速的、原則的いずれの場合でも、地平線の定義は別として典型的な宇宙の因果的半径はハッブル定数の逆数で与えられる。

現在測定されているハッブル定数の値はおよそ $H = \frac{70(km/s)}{326\text{ 万光年}}$ である。宇宙の年齢は光速 c をあからさまに書いて $\frac{c}{H} = \frac{326\text{ 万光年}\times 30\text{ 万 }km/s}{70(km/s)} \simeq 140$ 億年 である。

第9章　重力波

第10章　特異点定理

シュヴァルツシルド時空においては原点に特異点が発生したことを確認した。一般に議論は可能だろうか？球対称時空を考える

測地線偏差の方程式を考える。

$$d\theta^2/dt^2 = -\theta^2 + T_{00} \tag{10.1}$$

本質は尽きていることに気付いてもらいたい。

時間の正則性