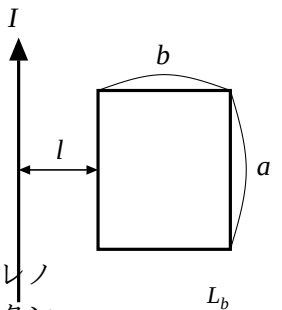
電磁気学基礎B演習(椎野)伍回

【1】《コイルの磁束》
コイルを貫く磁束 Φ に関して A 君は次のような疑問を持った．

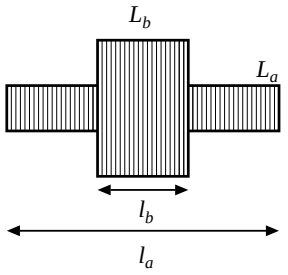
(i) 平面状のコイル (例えば円形コイル) で $\boldsymbol{B}$ が一様でコイル面に垂直なときは，コイルの面積を S として $\Phi = BS$ とすればよい．こういう話はあちこちに出ている．では $\boldsymbol{B}$ がコイル面に垂直でなかったり一様でなかったりしたらどうすればよいのだろう？
(ii) コイルを貫く磁束と言うときに，必ずコイルの平面を取るべきなのか？たとえば，コイルが赤道であるとき，面を北半球の地球表面にとってはいけないのか？
(iii) 輪ゴムやひもでやってみればわかるように，コイルが平面上にあるとは限らない．(ii) では「変なこと考えないで素直に平面を取れ」で済んでも，コイルを曲げてしまうとそもそもコイルの平面というのが存在しない．こういうときにコイルを貫く磁束はどういう面で考えるべきなのか？

A 君が納得するような明快な説明をお願いします．

【2】《コイルと電磁誘導則》
無限に長い直線導線と同一平面内に長方形コイルが置かれていて，その 1 辺が直線導線と距離 l を隔てて平行になっている．直線導線に交流電流 $I = I_0 \sin \omega t$ を流すとき，コイルに生ずる誘導起電力はどのようになるか．ただし，コイル自身の誘導電流の作る磁場は無視するものとする．

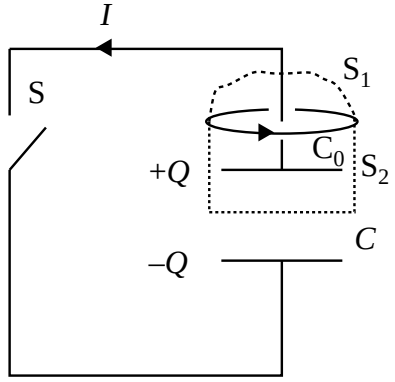


【3】《ソレノイドのインダクタンス》
(i) 長さ l，半径 a，単位長さ当たり巻数 n のソレノイドがある．ソレノイドは十分細長く $l \gg a$ とする．このソレノイドの自己インダクタンスを求めよ．ただし，十分細長いソレノイドの磁束密度は既知としてよい．
(ii) 長さ l_a，半径 a，単位長さ当たり巻数 n_a の十分細長い ($l_a \gg a$) ソレノイド L_a がある (右図)．L_a の外側に同軸のソレノイド L_b (長さ l_b，半径 b，単位長さ当たり巻数 n_b) を置いた．ただし，$l_b \ll l_a$，$a < b$ である．相互インダクタンスを求めよ．



【4】《変位電流》
図のような回路があり，平行平板コンデンサー C に電荷 Q が充電されている．$t = 0$ でスイッチ S を閉じると電流が流れる．
(i) 時刻 t における電流 $I(t)$ とコンデンサーの電荷 $Q(t)$ とはどのような関係にあるか．
(ii) 導線に電流が流れているので，周囲には磁束密度が生じている．Ampère の法則を閉曲線 C_0 を縁に持つ曲面 S_1 について適用すると ($\boldsymbol{j}$ は電流密度)

$$\oint_{C_0} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 \int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \qquad (1)$$



であるが，右辺の面積分は具体的にどうなるか．
(※) 定常電流が流れているときの Ampère の法則の応用などでよく出てくるのは C_0 が円周で S_1 が円板 (つまり，平面) の場合であるが，S_1 は C_1 を縁とする曲面ならどんなものでも構わない．定常電流には端がないことから，どんな曲面でもよいことが示せる．C_0 はどんな閉曲線でもよいのだから C_0 は一般には平面上にないわけで，その場合は S_1 を平面には選べない．
(iii) 今度は，Ampère の法則を同じ閉曲線 C_0 を縁に持つ曲面 S_2 について適用しよう．右辺の面積分は具体的にどうなるか．S_2 はコンデンサーの内部を極板に平行に通るとしよう．
(iv) (ii)(iii) で Ampère の法則の右辺が異なるので矛盾である．コンデンサー内部の電場 $\boldsymbol{E}$ に関して，

$$\varepsilon_0 \frac{d\boldsymbol{E}}{dt} \tag{2}$$

を電流密度のように見なせば矛盾が解消されることを説明せよ．
(※) この問題では真空中を仮定している．誘電体や磁性体のある場合には，本文の式はそれぞれ

$$\oint_{C_0} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\mathrm{S}_1} \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3}$$

$$\frac{d\boldsymbol{D}}{dt} \tag{4}$$

である．