基礎物理学演習IIIb-A(椎野)No.3

2014.May

【1】《2 次元極座標での運動方程式》
平面上の運動を 2 次元極座標で記述する話で，A 君は次のように考えた．

力 $\boldsymbol{F}$ を動径方向と角度方向に分解すれば

$$\boldsymbol{F} = F_r \boldsymbol{e}_r + F_\phi \boldsymbol{e}_\phi \tag{1}$$

である．一方，質点の位置は $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$，加速度は $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r$ であるから，運動方程式 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ に代入して成分毎に表示すれば

$$F_r = m\ddot{r} \tag{2}$$

$$F_\phi = 0 \tag{3}$$

が 2 次元極座標で表現した運動方程式である．

さて，A 君の議論は正しいのだろうか．
【2】《線積分》
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (x, y)$ であるとき，2 つの経路
C_1 : $(0,0) \Rightarrow (1,1)$ の直線．
C_2 : 放物線 $y = x^2$ に沿って $(0,0)$ から $(1,1)$ へ
に沿った線積分

$$W_1 = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}, \qquad W_2 = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1}$$

を計算したい．$d\boldsymbol{l}$ の意味は $d\boldsymbol{l} = (dx, dy)$ である (つまり，接線方向の微小ベクトル)．
(※) 最も単純な場合には仕事 W が力 F と質点の移動距離 l との積 Fl であるの既に知っているはず．実際，地上付近で質点 m を h だけ持ち上げるときの仕事 mgh はおなじでみであろう．では，力 $\boldsymbol{F}$ (ベクトル！) が場所によって異なっていたり質点 (など) が動く方向がいろいろ変わったりしたらどうするのか．例によって，微小な動き $d\boldsymbol{l}$ に対しては力 $\boldsymbol{F}$ が変化しないと思って，微小な仕事 $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ を積分すればよい．これが (1) の線積分の意味である．
(i) 2 次元平面上の話だが，積分は線に沿って行われるので本質的に 1 次元の積分である．具体的にはパラメーター表示を使うのが一番簡単である．パラメーター t が $0 \leq t \leq 1$ であるとして，C_1 はどのように表したらよいか
(ii) C_1 のパラメーター表示を使って $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$ をパラメーター t で表現せよ．
(iii)

$$W_1 = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2}$$

を求めよ．
(iv) (i)〜(iii) と同様の方針で

$$W_2 = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{3}$$

を求めよ．

(v) (i) の $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の代わりに $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = (y, 0)$ として，2 つの経路 $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ に沿った線積分

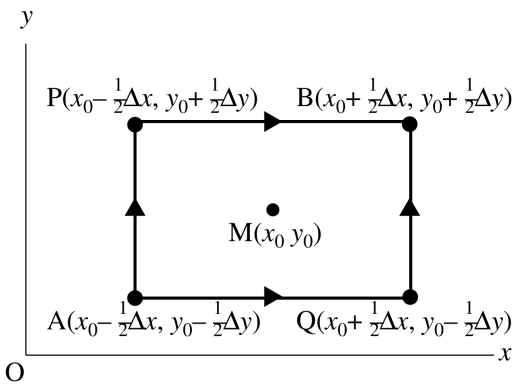
$$W_1' = \int_{C_1} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l}, \qquad W_2' = \int_{C_2} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{4}$$

を計算せよ．

【3】《線積分》
保存力場では力の線積分

$$\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

が経路 C の詳細によらずにその端点だけで決まる．



図で端点を A，B とし，経路 I を APB，経路 II を AQB とする．Δx，Δy の最低次を考えることにより，力が保存力であるための条件は

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

であることを示せ．
(※) 目的の式の左辺は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ の z 成分である．