力学基礎壱演習 P組　椎野

【1】《偏微分と固定変数》
(i) 2 次元平面のデカルト座標と極座標の関係は

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1}$$

と表されます．A 君も B 君も C 君もそのことはよく知っています．さて，$\partial r/\partial x$ なのですが...

A:　$r = \sqrt{x^2+y^2}$ だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \tag{2}$$

でいいはずだ．
B: 平方根の微分なんて面倒だ．もっと頭を使わなくっちゃ．$x = r\cos\theta$ だから $r = x/\cos\theta$ で

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x} \tag{3}$$

とするのが簡単だ．あれ，おかしいな．A 君の結果とちがうな．逆数になってしまっているぞ．
C: $x = r\cos\theta$ だから

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \tag{4}$$

だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial r}} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{r}{x} \tag{5}$$

これだと，B 君の結果と同じになる．
A，B，C:　おかしいな？ 何でやりかたによって分母と分子が逆になるんだ？

いったいどうなっているのか，三人に説明してあげてください．二人とも熱心なので，どうして分母分子が逆になってしまったのかという理由まで明確に説明しないと納得してくれません．

【2】《2 次元極座標と微小距離》
2 次元極座標 (r,θ) で，r が不変のまま θ が $\mathrm{d}\theta$ だけ変化したときの θ 方向の距離変化は $r\,\mathrm{d}\theta$ であるという記述をよく目にする．でも，半径 r で中心角 $\mathrm{d}\theta$ なら弧の長さは $r\,\mathrm{d}\theta$ だが，これはもちろん弦の長さ (すなわち直線距離) ではない．このあたりの事情について考察せよ．

【3】《2 次元極座標の基本ベクトル》
(i) 2 次元極座標 (r,θ) の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ とはどういうことか，図示して説明せよ．
(ii) 図を描いて $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$ をデカルト座標の基本ベクトル i，j で表せ．
(※) i，j は $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，あるいは $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ と書かれることもある．
(iii) 「基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ の方向は，θ を固定して r を $r+\mathrm{d}r$ に微小変化させたときに，点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が変化する方向である」ということもできる．$\boldsymbol{e}_\theta$ についても全く同様である．この考えに従って，(ii) の結果を再導出せよ．

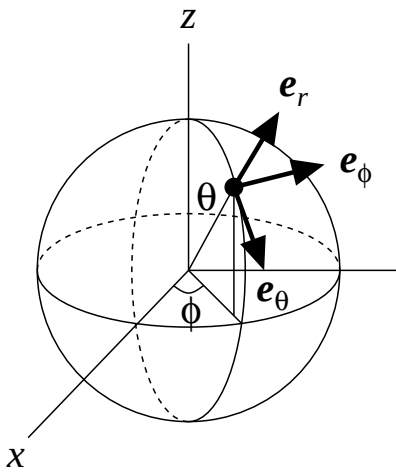
【4】《2 次元極座標の面積要素》
(i) 動径が r から $r+\mathrm{d}r$，角度が θ から $\theta+\mathrm{d}\theta$，という部分の微小面積はどのように表されるか．
(ii) (i) の結果を使って，円の面積 πR^2 を導出せよ．
(iii) A 君は次のような疑問を持った．

デカルト座標の時，$x \sim x+\mathrm{d}x$ と $y \sim y+\mathrm{d}y$ の部分の長方形の面積は $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ で，これは何の近似もない．ところが (i) の結果は微小量の高次を無視した「近似」である．積分というのは微小量を足し合わせてゆくのだから，無視した部分の誤差が累積して影響を与えることがあるのではないか？

A 君が納得するような説明をお願いします．

【5】《3 次元極座標》
(i) 3 次元デカルト座標 (x,y,z) と 3 次元極座標 (r,θ,ϕ) との関係は

$$x = r\sin\theta\cos\phi \tag{1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \tag{2}$$
$$z = r\cos\theta \tag{3}$$



である．3 次元極座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\phi$ を 3 次元デカルト座標の基本ベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ で表せ．
(※) 北極から測った「緯度」が θ (極角)，x 軸の正の側から y 軸の正の側へ測った「経度」が ϕ (方位角) である．したがって，角度の範囲は $0 \le \theta \le \pi$，$0 \le \phi < 2\pi$ である．極角は地理的な緯度とは測り方が違うことに注意．方位角は西経を使わずに全部東経で測ったことになっている．
(ii) $r \sim r+\mathrm{d}r$，$\theta \sim \theta+\mathrm{d}\theta$，$\phi \sim \phi+\mathrm{d}\phi$ の部分の微小体積要素が

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{4}$$

であることを説明せよ．
(iii)

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{5}$$

を用いて，球の体積 $(4/3)\pi R^3$ を導け．
(iv) 球の表面積の公式を既知として，球の半径 $r \sim r+\mathrm{d}r$ の部分の微小体積 $\mathrm{d}V_r$ を求めよ．
(v) 点 (r,θ,ϕ) と点 $(r+\mathrm{d}r,\theta+\mathrm{d}\theta,\phi+\mathrm{d}\phi)$ の間の微小距離はどのようになるか．

【6】《2 次元極座標と点の運動》
(i) 点が運動していて，その座標が時間 t の関数として $x=x(t)$，$y=y(t)$ と表されているとき，位置ベクトルは $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ である．このとき，x 方向の速度成分は $v_x=\dot{x}$ であり，y 方向の速度成分は $v_y=\dot{y}$ である．言い換えれば，速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

と書ける．
　点の位置が極座標で $r=r(t)$，$\theta=\theta(t)$ と表されているとき $\boldsymbol{r}=\rho\boldsymbol{e}_r$ なので，B 君は上との類推から

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r \tag{2}$$

であると考えた．さてB君の考えでよいだろうか．
(※) $\dot{x}$ は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ のことで，上についた「・」は時間微分の意味である．したがって，$y(x)$ に対して $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ のことを $\dot{y}$ とは書いてはいけない．時間微分を「・」で表すのはニュートンに始まる．
(ii) 2次元極座標での速度 $\boldsymbol{v}$ を求めよ．
(※) もちろん r, θ, $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表すのである．
(iii) 2次元極座標での加速度 $\boldsymbol{a}$ を求めよ．