微分方程式

1　はじめに

1.1　独立変数の個数

1 個 $\cdots$ 常微分方程式
2 個以上 $\cdots$ 偏微分方程式

1.2　導関数の最高階

導関数の最高階のものが n 階 $\cdots n$ 階微分方程式

1.3　線形と非線形

線形 $\cdots$ 未知関数およびその導関数について 1 次の項しか含まないもの
非線形 $\cdots$ 未知関数およびその導関数について 2 次以上の項を含むもの

1.4　一般解と特解

n 階微分方程式の一般解 $\cdots n$ 個の任意定数を含む解
特解 $\cdots$ 一般解における任意定数が特別な値をとった解 (任意定数を含まない解)

2　1 階常微分方程式

2.1　変数分離形

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{1}$$

$f(x) \neq 0$ として

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt$$

両辺を積分して、一般解は

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt + C \quad (\text{ただし、}C\text{ は任意定数}) \tag{2}$$

2.2　線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t) \qquad \text{非同次 (非斉次) 方程式} \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0 \qquad \text{同次 (斉次) 方程式} \tag{4}$$

同次方程式 (4) は変数分離形で扱えるので、一般解は

$$\frac{dx}{x} = -p(t)dt$$

より

$$\int \frac{dx}{x} = -\int p(t)dt + c$$

$$\log|x| = -\int p(t)dt + c$$

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt} \quad \text{(ただし、}C\text{ は任意定数)} \tag{5}$$

非同次方程式は、変数変化法を使って (5) の結果を

$$x = C(t)e^{-\int p(t)dt}$$

として、(3) 式に代入し、整理すると

$$\frac{dC(t)}{dt} = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$C(t) = \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C$$

$$\therefore \quad x(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right) \quad \text{(ただし、}C\text{ は任意定数)} \tag{6}$$

を得る。

[**演習問題** 1] 次の 1 階微分方程式の一般解を求めよ。

$$1)\ (1+t)\frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad 2)\ \frac{dx}{dt} - x = t$$

[**演習問題** 2] RC 回路を流れる電流 $i(t)$ の満たす微分方程式を考える。抵抗を R、コンデンサーの静電容量 (電気容量) を C、蓄えられる電荷を Q、電源電圧を $V(t)$ とすると

$$Ri + \frac{Q}{C} = V \tag{7}$$

が成り立つ。(7) 式の両辺を時間 t で微分すると

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dV}{dt} \tag{8}$$

となる。ここで、$\dfrac{dQ}{dt} = i$ であるから (8) 式は

$$R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dV}{dt} \tag{9}$$

となり、(9) 式は、$i(t)$ についての、非同次 1 階線形微分方程式になる。

問 1 この微分方程式の一般解を求めよ。

問 2 交流電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t$ のとき、この微分方程式の一般解を求めよ。

3　2 階常微分方程式

3.1　定係数の 2 階線形微分方程式

定係数の 2 階同次線形微分方程式

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = 0 \tag{10}$$

ただし、a, b は定数、　$\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$,　$\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ である。
$x(t) = e^{\lambda t}$ とおくと、$e^{\lambda t} \neq 0$ であるから (10) 式は

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0 \tag{11}$$

となり、これを**特性方程式**という。この方程式の根が

1) 相異なる実根 λ_1, λ_2 の場合、一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{12}$$

となる。

2) 複素共役な根 $\lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq$ の場合

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 e^{(p+iq)t} + C_2 e^{(p-iq)t} \\ &= e^{pt}\{C_1 e^{iqt} + C_2 e^{-iqt}\} \\ &= e^{pt}\{C_1(\cos qt + i\sin qt) + C_2(\cos qt - i\sin qt)\}^* \\ &= e^{pt}\{(C_1 + C_2)\cos qt + i(C_1 - C_2)\sin qt\} \\ &= e^{pt}\{A\cos qt + B\sin qt\} \end{aligned} \tag{13}$$

C_1, C_2 を共役複素数とすると、$A = C_1 + C_2,\ B = i(C_1 - C_2)$ は共に実数となる。また、(13) 式は、$C = \sqrt{A^2 + B^2}$,　$\tan\phi = \dfrac{B}{A}$ とすると

$$x(t) = Ce^{pt}\cos(qt - \phi) \tag{14}$$

となる。

*) オイラーの公式 $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ を使う。

3) 重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$ の場合 $x(t) = f(t)e^{-at}$ とおくと

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{f}e^{-at} - afe^{-at} \\ \ddot{x} &= \ddot{f}e^{-at} - 2a\dot{f} + a^2 fe^{-at} \end{aligned}$$

これらを (10) 式に代入して整理すると、$b = a^2$ であるから

$\ddot{f}=0$ となる。したがって、A, B を任意定数として $f(t)=At+B$
したがって、一般解は

$$x(t)=(At+B)e^{-at} \tag{15}$$

非同次方程式 $\ddot{x}+2a\dot{x}+bx=f(t)$ の一般解 $x(t)$ は、

(非同次方程式の一般解:$x(t)$) = (同次方程式の一般解:$X(t)$) + (非同次方程式の特解:$x_0(t)$)

である。上式を非同次方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}[X(t)+x_0(t)]+2a\frac{d}{dt}[X(t)+x_0(t)]+b[X(t)+x_0(t)]\\
&\quad=[\ddot{X}+2a\dot{X}+bX]+[\ddot{x_0}+2a\dot{x_0}+bx_0]\\
&\quad=0+f(t)=f(t)
\end{aligned}$$

となる。$x(t)$ は任意定数を 2 つ含み、非同次方程式の一般解になっていることがわかる。

[**演習問題** 3] 次の 2 階微分方程式の一般解を求めよ。

1) $\ddot{x}-4x=0$　　2) $\ddot{x}+4x=0$　　3) $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=0$
4) $\ddot{x}-2\dot{x}+3x=0$　　5) $\ddot{x}+x=0$　　6) $\ddot{x}-4\dot{x}+4x=0$

4 振動

4.1 単振動

バネ定数を k、バネについている物体の質量を m とすると運動方程式は

$$m\ddot{x}=-kx \tag{16}$$

となる。ここで、$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$(固有振動数) とおくと (16) 式は

$$\ddot{x}=-\omega^2 x \tag{17}$$

となる。$x=e^{\lambda t}$ とおき、(17) 式に代入すると $\lambda^2=-\omega^2$ より

$$\lambda=\pm i\omega$$

よって、一般解は

$$\begin{aligned}
x(t)&=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}\\
&=C_1(\cos\omega t+i\sin\omega t)+C_2(\cos\omega t-i\sin\omega t)\\
&=(C_1+C_2)\cos\omega t+i(C_1-C_2)\sin\omega t\\
&=A\cos\omega t+B\sin\omega t\\
&=C\cos(\omega t-\phi)
\end{aligned} \tag{18}$$

C_1, C_2 を共役複素数 $(\alpha \pm i\beta)$ とすると、$A = C_1 + C_2 = 2\alpha,\ B = i(C_1 - C_2) = -2\beta$ となる。
$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan\phi = \dfrac{B}{A}$ とする。

4.2 減衰振動

単振動する質点に、速さに比例する抵抗 $-Kv = -K\dot{x}$ が作用すると運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - K\dot{x} \tag{19}$$

となる。ここで、$\omega^2 = \dfrac{k}{m}, \quad 2\gamma = \dfrac{K}{m}$ とおくと (19) 式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{20}$$

となる。$x = e^{\lambda t}$ とおき、(20) 式に代入すると、特性方程式は

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \tag{21}$$

となり、$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ を得る。
抵抗力が比較的小さい場合、つまり、$\gamma^2 < \omega^2$ のとき、$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ とおくと

$$\lambda = -\gamma \pm i\omega'$$

であるから

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega' t - \phi) \tag{22}$$

となる。抵抗がないとき $(\gamma = 0)$ とくらべると、$\omega' < \omega$ であり、ゆっくり振動しながら $(\cos(\omega' t - \phi))$、振幅は指数関数的に減少する $(e^{-\gamma t})$。このような運動を減衰振動という。

4.3 強制振動

減衰振動している物体に周期的な外力 $f_e \cos\omega_e t$ が働く場合を考える。$\dfrac{f_e}{m} = F_e$ とおくと、運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = F_e cos\omega_e t \tag{23}$$

となる。これは、非同次方程式であるから、(23) 式の特解を求める。
複素表示で考える。複素数 z は、$\hat{z}$ と表すことにする。(23) 式は

$$\ddot{\hat{x}} + 2\gamma\dot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = F_e e^{i\omega_e t} \tag{24}$$

ここで、$\hat{x} = \hat{a}e^{i\omega_e t}, \quad \hat{a} = a_0 e^{i\phi_0}$ とおくと、(24) 式は

$$(-\omega_e^2 + 2i\gamma\omega_e + \omega^2)\hat{a}e^{i\omega_e t} = F_e e^{i\omega_e t} \tag{25}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{F_e}{(\omega^2-\omega_e^2)+2i\gamma\omega_e} \\ &= \left[\frac{\omega^2-\omega_e^2}{(\omega^2-\omega_e^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2} - i\frac{2\gamma\omega_e}{(\omega^2-\omega_e^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}\right]F_e \qquad (26)\end{aligned}$$

$$a_0 = |\hat{a}| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,\hat{a})^2+(\mathrm{Im}\,\hat{a})^2} = \frac{F_e}{\sqrt{(\omega^2-\omega_e^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad (27)$$

$$\phi_0 = \tan^{-1}\frac{(\mathrm{Im}\,\hat{a})}{(\mathrm{Re}\,\hat{a})} = \tan^{-1}\frac{-2\gamma\omega_e}{\omega^2-\omega_e^2} \qquad (28)$$

が得られる。したがって、(23) 式の一般解は、(22) 式を考慮して

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega' t-\phi) + a_0\cos(\omega_e t+\phi_0) \qquad (29)$$

ここで、C, ϕ は任意定数、γ, ω', a_0, ω_e, ϕ_0 は定数。
十分時間がたつと、(29) 式の第 1 項は 0 に近づくので、初期条件によらず、十分時間がたつと振動は

$$x(t) = a_0\cos(\omega_e t+\phi_0) \qquad (30)$$

に落ち着く。物体は固有振動とは無関係に外力によって強制された振動をする。

[**演習問題** 4] 次の 2 階微分方程式の一般解を求めよ。

1) $\ddot{x}-\omega_0^2 x = 0$　　2) $\ddot{x}+\omega_0^2 x = \cos\omega t$　　3) $\ddot{x}+6\dot{x}+13x = 0$
4) $\ddot{x}+6\dot{x}+9x = 0$　　5) $\ddot{x}+6\dot{x}+8x = 0$　　6) $\ddot{x}+8\dot{x}+20x = \cos\omega t$
7) $\ddot{x}+a^2\dot{x} = \cos bt \quad (a \neq b)$

参考書：物理入門コース／演習 5「例解　物理数学演習」和達三樹著（岩波書店）p.44-60