力学基礎 1　期末試験

2020 年 6 月 15 日

1　微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

微分方程式の解について考える。$x = \exp(\lambda_m t),\ \ m = 1, 2, ...$ であると仮定して (1) を満たす λ_m を全て求めよ。従って複素数である解 $x(t)$ は

$$x(t) = \sum_m A_m e^{\lambda_m t} \tag{2}$$

と与えられる。解 $x(t)$ が実数であるとき A_m の満たすべき条件を与えよ。

次に仮定を置かずに (1) を解く。
〇エネルギーの積分を求めた時と同様に、微分方程式に dx/dt を掛けた式は時間について積分を行うことができる。
〇積分の結果（〜エネルギーの定義式のようなもの）を dx/dt について解くことにより新たに一階の微分方程式を得る。
〇これを変数分離形に変形し時間について積分することにより最終的な解を得る。
但し

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}(x/a) + C \tag{3}$$

である。
〇さらに (難問）

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \cos \omega t \tag{4}$$

(ω に注意) を解け。（定数変化法）

2　保存力

二次元空間でデカルト座標 (x, y) と極座標 (r, θ) を考える。
二つの力の場

$$\mathbf{F_1}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\theta\ ,\quad \mathbf{F_2}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta$$

について、それぞれを $\mathbf{e_x}$ と $\mathbf{e_y}$ の線形結合の形で与え、各点でのベクトルの空間での分布の様子を図示せよ。

$\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$ の渦を調べ、それらが保存力であるかを判定せよ。保存力である場合には

$$\mathbf{F_i} = -\nabla U_i(\mathbf{r})$$

としてポテンシャル U_i を与えよ。
（U_i は (x, y)、(r, θ) どちらの関数として与えてもよい。）
（以下公式）

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}(x/a) + C \tag{5}$$

3　2 次元極座標の面積要素

〇動径が r から $r + \mathrm{d}r$，角度が θ から $\theta + \mathrm{d}\theta$，という部分の微小面積はどのように表されるか．ここで A 君は次のような疑問を持った．

デカルト座標の時，$x \sim x + \mathrm{d}x$ と $y \sim y + \mathrm{d}y$ の部分の長方形の面積は $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ で，これは何の近似もない．ところが (i) の結果は微小量の高次を無視した「近似」である．積分というのは微小量を足し合わせてゆくのだから，無視した部分の誤差が累積して影響を与えることがあるのではないか？

A 君が納得するような説明をお願いします．