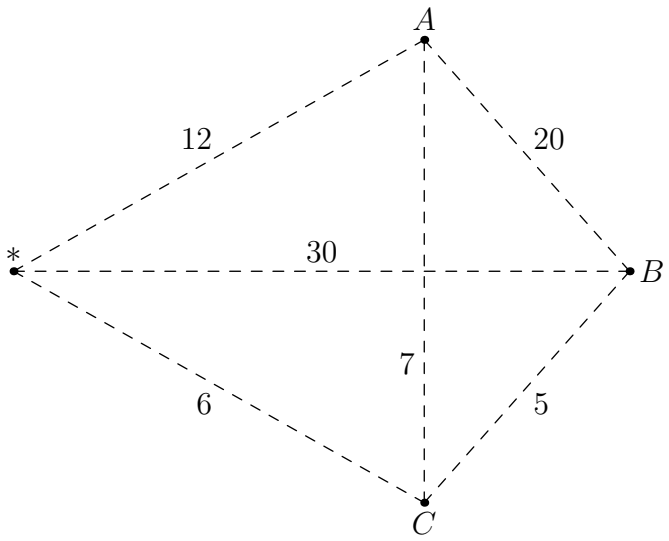
２０１９年度協力ゲーム理論宿題４（提出期限：５月２３日）

1. 水源*から自治体 A, B, C それぞれに水を供給する問題を考える（４月１９日の資料を参照）．以下のグラフでは，対応する辺に水道管を設置するために必要なコストを表す．



(a) この状況に対応する，費用削減分により定義した特性関数形ゲームのシャープレイ値を求めよ．

(b) シャープレイ値に基づくそれぞれの自治体の支払額を求めよ．（注意：仮に負の値が導出されても，そのままの答えを書くこと．）

2. $N = \{A, B, C\}$ をプレイヤーの集合とする特性関数形ゲーム (N, v) を考え，$S \subseteq N \setminus \{B, C\}$ を満たす任意の提携 S に対してプレイヤー B の貢献度がプレイヤー C の貢献度以上とする．$\phi = (\phi_A, \phi_B, \phi_C)$ を (N, v) のシャープレイ値としたとき，$\phi_B \geq \phi_C$ が成り立つことを示せ．

3. $N = \{A, B, C\}$ をプレイヤーの集合とし，以下の重み付き多数決ゲームを考える．

$$[q; w_A, w_B, w_C]$$

ただし，$w_B \geq w_C$ を仮定する．このとき，B のシャープレイ＝シュービック投票力指数が C のシャープレイ＝シュービック投票力指数以上であることを問２の結果を用いて示せ．また，バンザフ投票力指数についても，B のものが C のもの以上であることを示せ．

4. $N = \{A, B, C, D\}$ をプレイヤーの集合とする以下の重み付き多数決ゲームを考える．

$$[q; w_A, w_B, w_C, w_D] = [51; 40 + x, 30, 20 - x, 10]$$

ただし，x は非負整数とし，x が与えられたときのプレイヤー $i \in N$ のシャープレイ＝シュービック投票力指数を $\phi_i(x)$，バンザフ投票力指数を $\beta_i(x)$ とそれぞれ表す．各 $i \in \{A, B, C, D\}$ について，$\phi_i(0)$, $\beta_i(0)$, $\phi_i(1)$, $\beta_i(1)$ を計算せよ．また，計算過程も記すこと．（シャープレイ＝シュービック投票力指数およびバンザフ投票力指数を計算する際に，対称性を使って省略してもよい．）