第５回：最小費用全域木ゲームとコア

河崎　亮

工学院　経営工学系

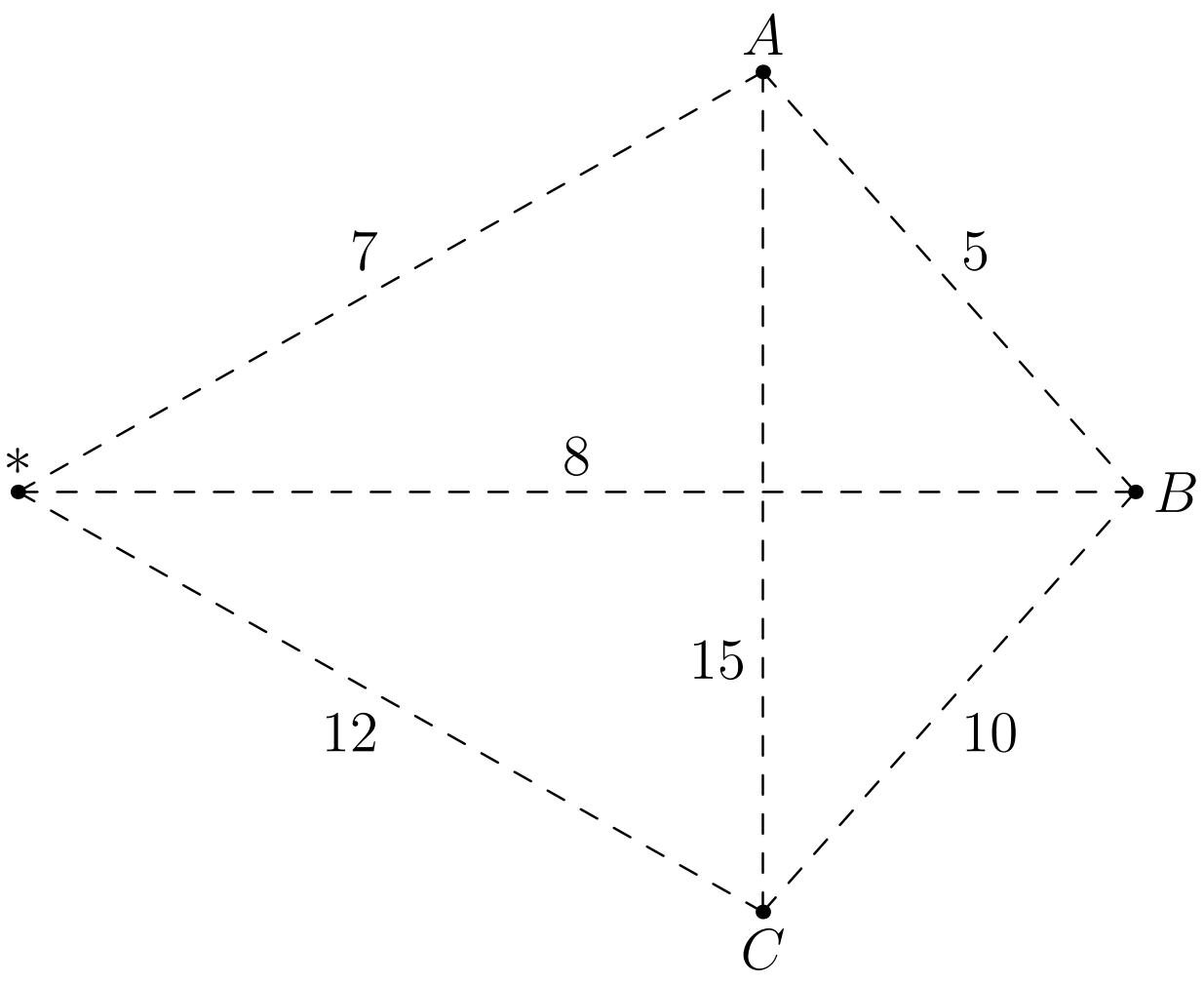
４月１８日（木）

例３（復習）

- 自治体 A,B,C が共通の水源から水を供給するため，水道管を設置.
- 水源から直接それぞれの自治体が水道管を引いた場合の設置費用は
  - 水源 $\longrightarrow A$：７０００万円
  - 水源 $\longrightarrow B$：５５００万円
  - 水源 $\longrightarrow C$：６５００万円

今回：この類の問題をグラフを使って表し，分析する.

イメージ



*: 水源
数字：辺に水道管を設置する費用

例

“水源” と” 自治体” に対応する例：

- ダム（水源）と水を必要としている村の住民
- インターネットとユーザー
- ケーブルテレビと視聴者

今日の問題

1. 各自治体に水を供給する方法の中で総費用が最小になるものを求める．（最適化理論）
2. 上の 1. で求めたルートで水道管を建設したときの費用分担方法を決定する．（ゲーム理論）

問題設定

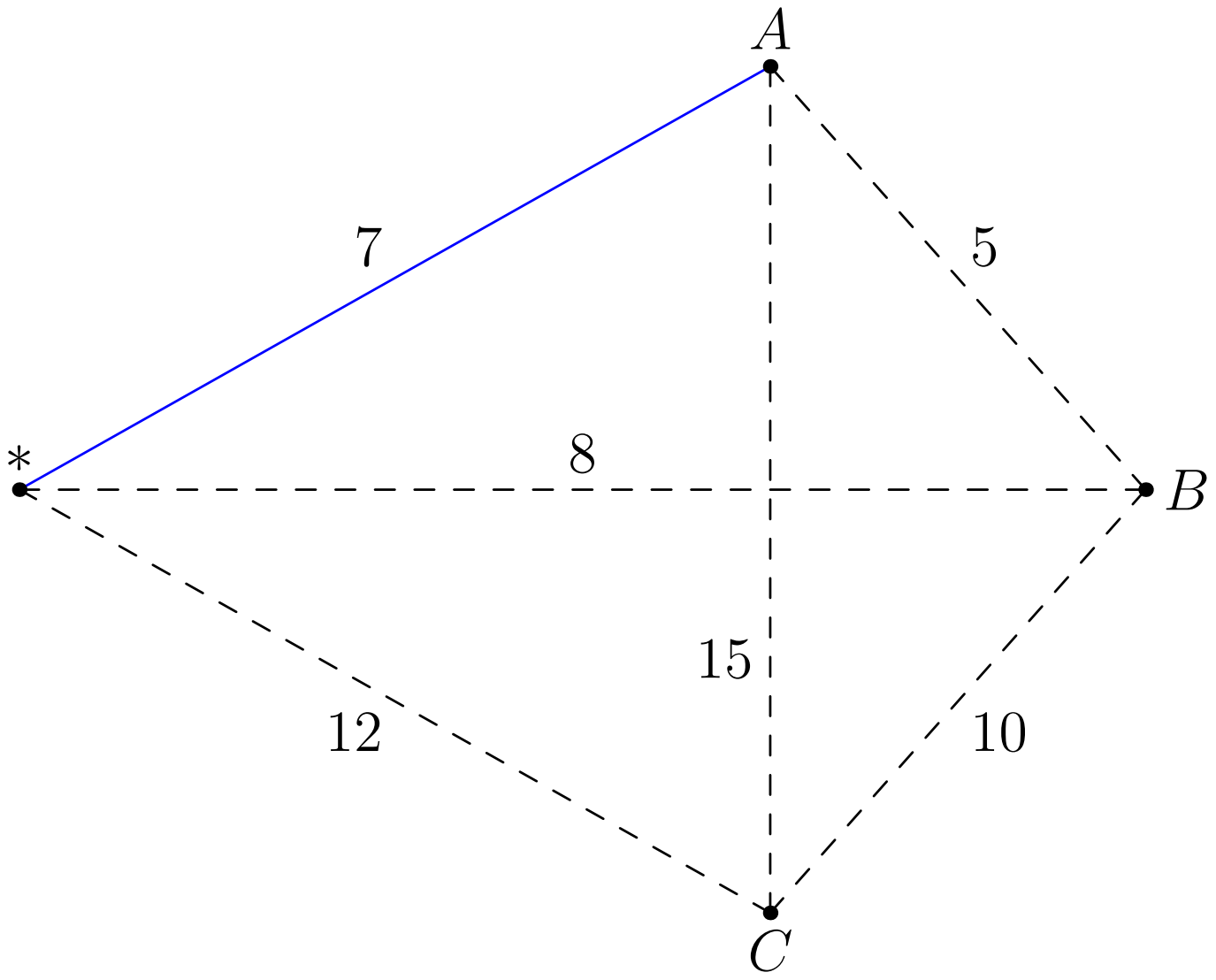
- 例３と同様に三つの自治体 A,B,C が水源 ($*$ と表す）から水を引くために水道管を建設することを考えているとする.
- 最初に A,B,C それぞれに水が供給される水道管の設置方法の中から，費用が最小なものを求める.

今日の問題

1. 各自治体に水を供給する方法の中で総費用が最小になるものを求める．（最適化理論）
   - A: Prim のアルゴリズムにより求める．
2. 上の 1. で求めたルートで水道管を建設したときの費用分担方法を決定する．（ゲーム理論）

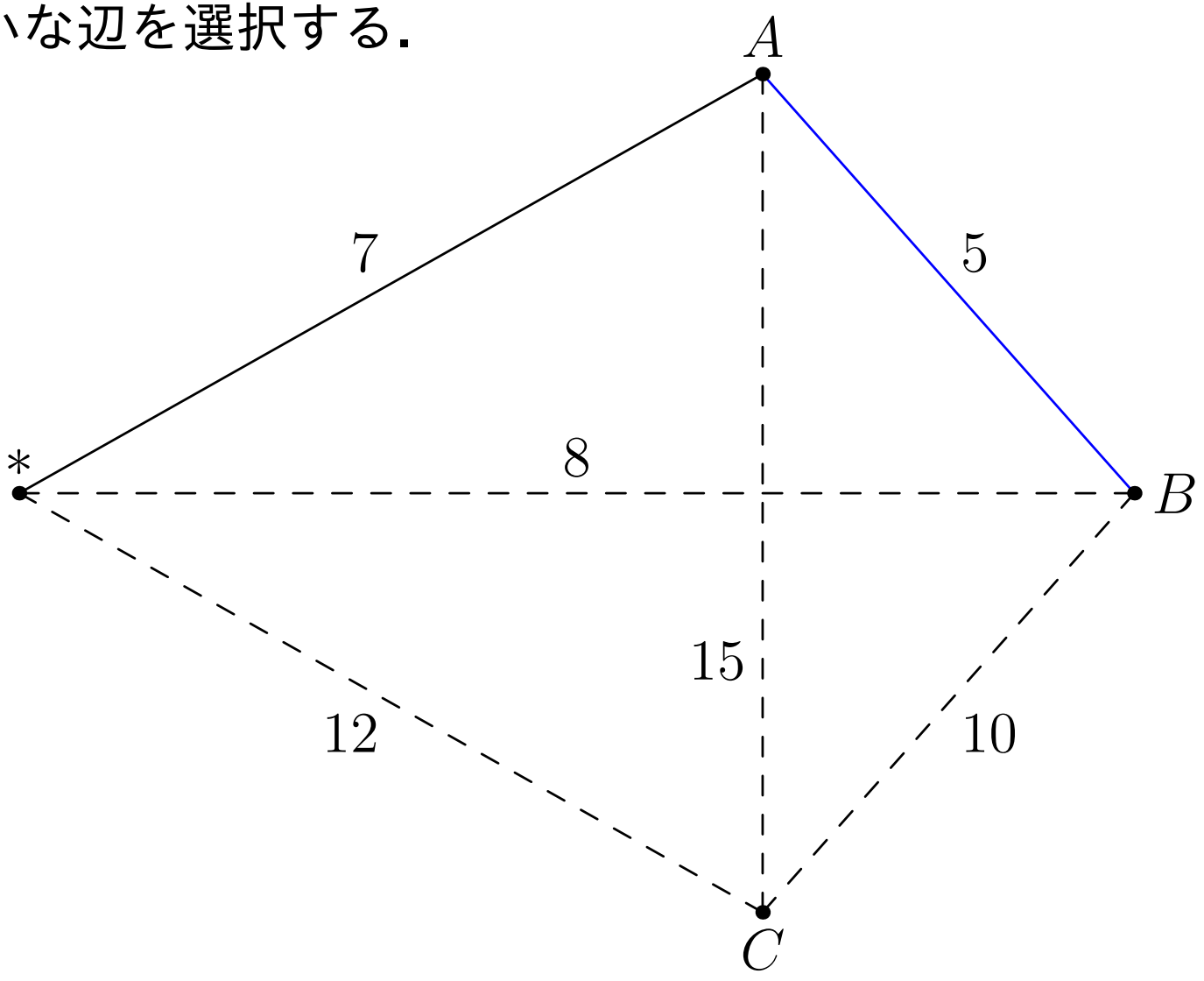
問題の解き方：Prim のアルゴリズム

Step 0: $*$ から出ている辺でコストが最小な辺を選択する.



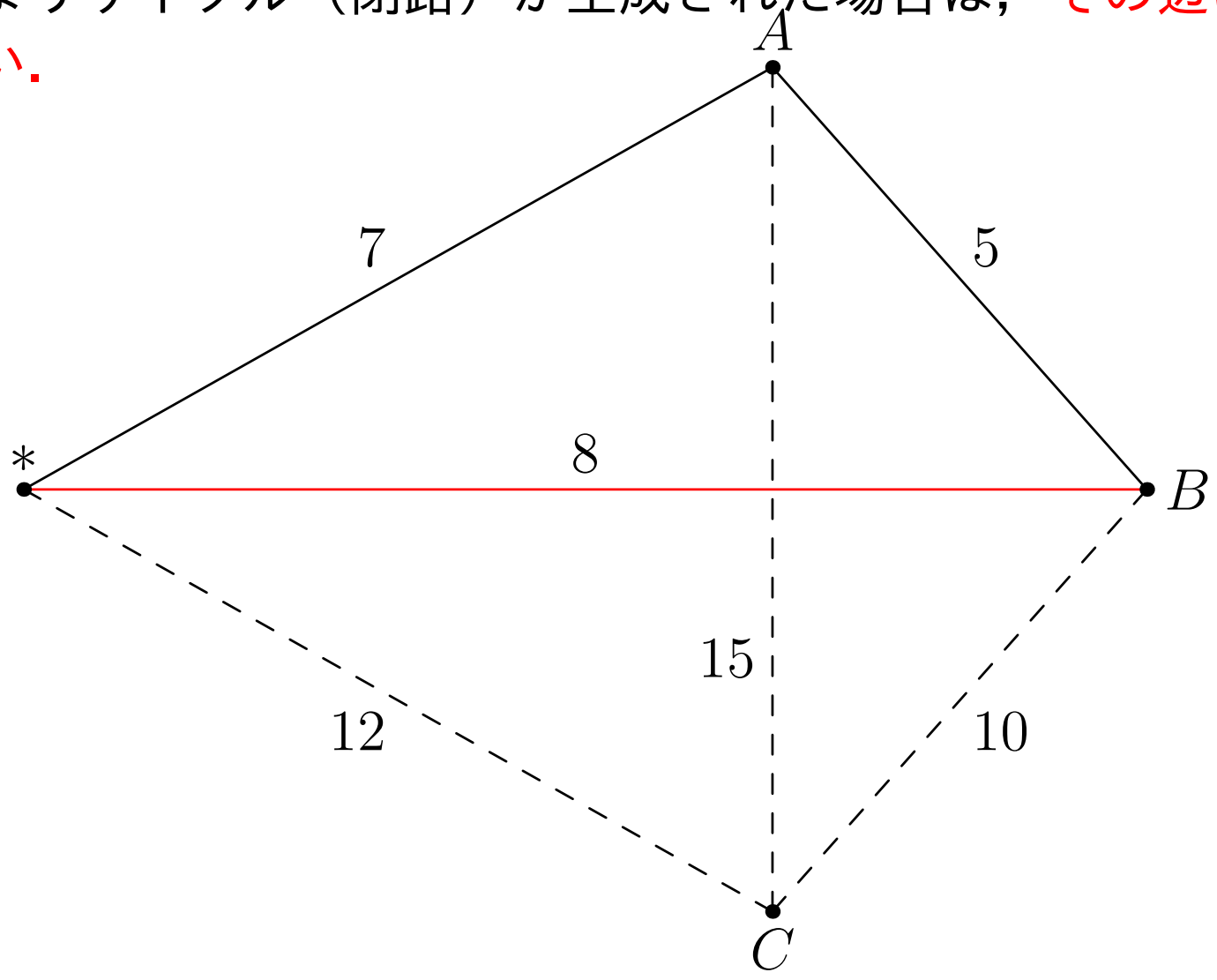
問題の解き方：Prim のアルゴリズム

Step 1：$*$ または $*$ に繋がっている点から出ている辺でコストが最小な辺を選択する.



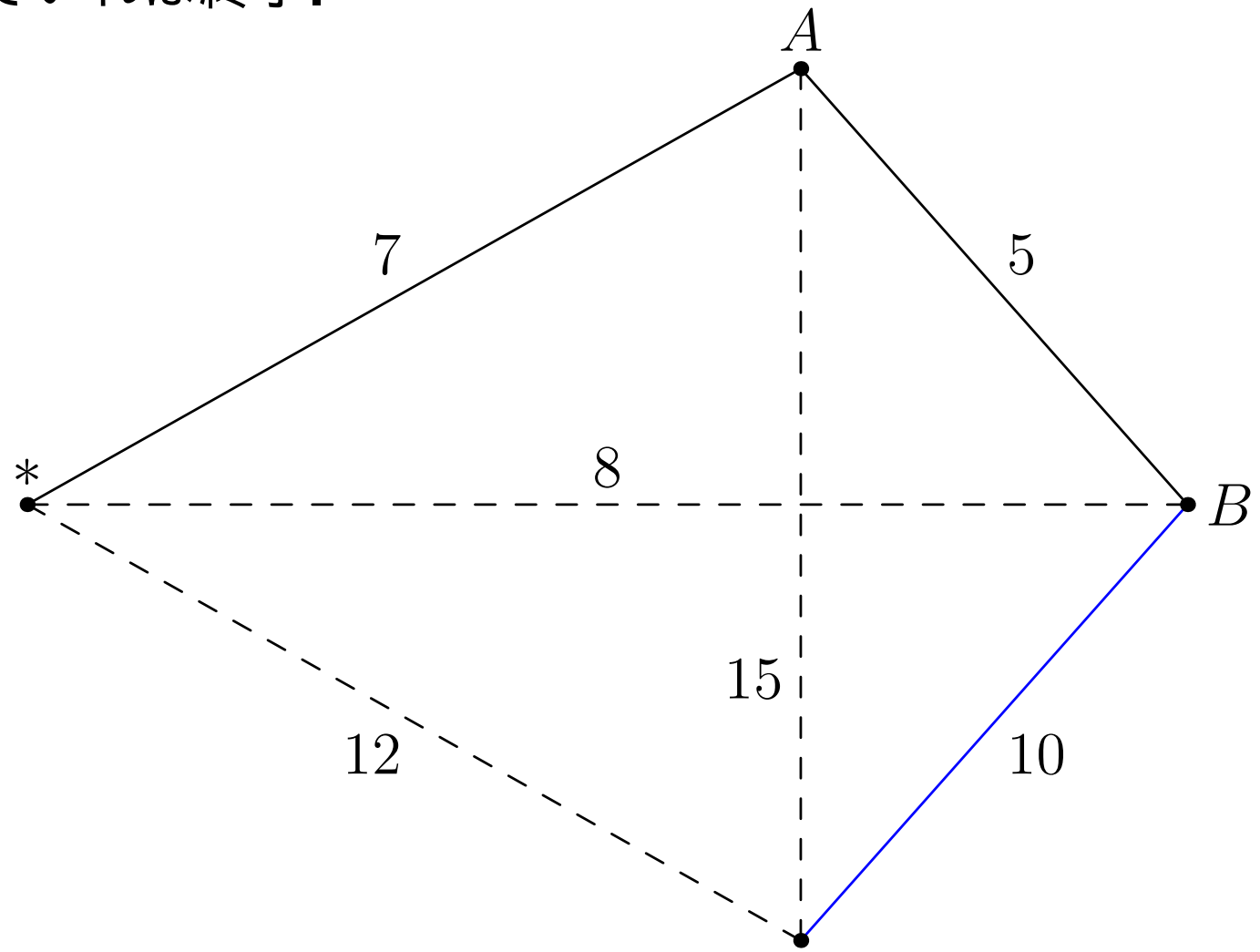
問題の解き方：Prim のアルゴリズム

Step 2: 同様に繰り返す．ただし，最小コストの辺を加えることによりサイクル（閉路）が生成された場合は，その辺は加えない．



問題の解き方：Prim のアルゴリズム

Step 2: $*$ または $*$ から繋がっている点からサイクルが生成されない辺の中で最小コストの辺を選ぶ．全自治体に水が供給されていれば終了．



Prim のアルゴリズムのまとめ

- 各ステップにおいて，サイクルが生成されないように注意しながら，コストが最小な辺を選ぶ.
- 最小費用全域木が生成される
- このように，各段階で単純に一番望ましいものを選ぶアルゴリズム $\rightarrow$ 貪欲アルゴリズム

今日の問題

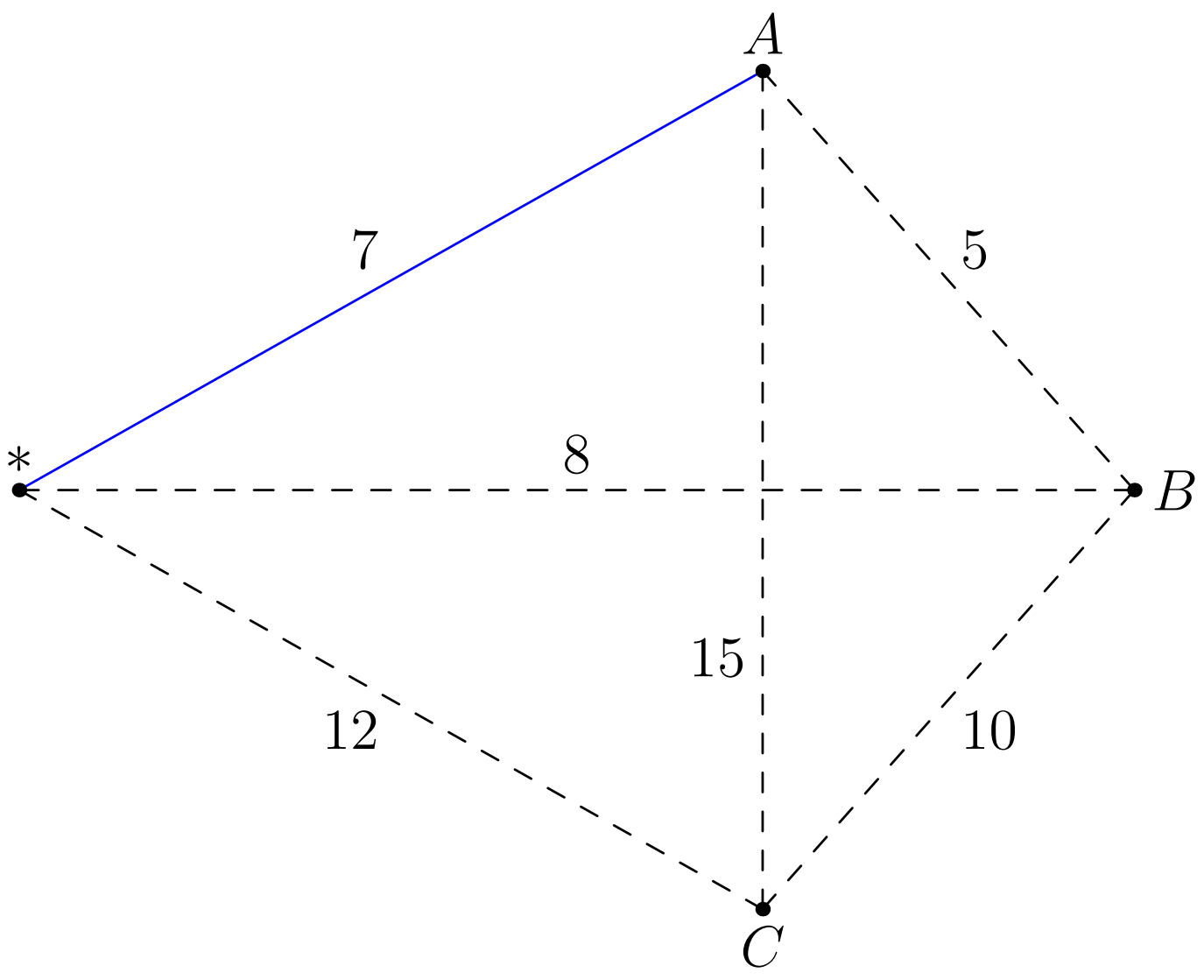
1. 費用が最小になるよう，各自治体に水を供給する供給する方法を求める．（最適化理論）
2. 1. で求めたルートで水道管を建設した場合，各自治体の負担分を決める．（ゲーム理論）
   - A: Bird の分担方法.

Bird の分担方法 (Bird's allocation rule)

Prim のアルゴリズムの各ステップにおいて

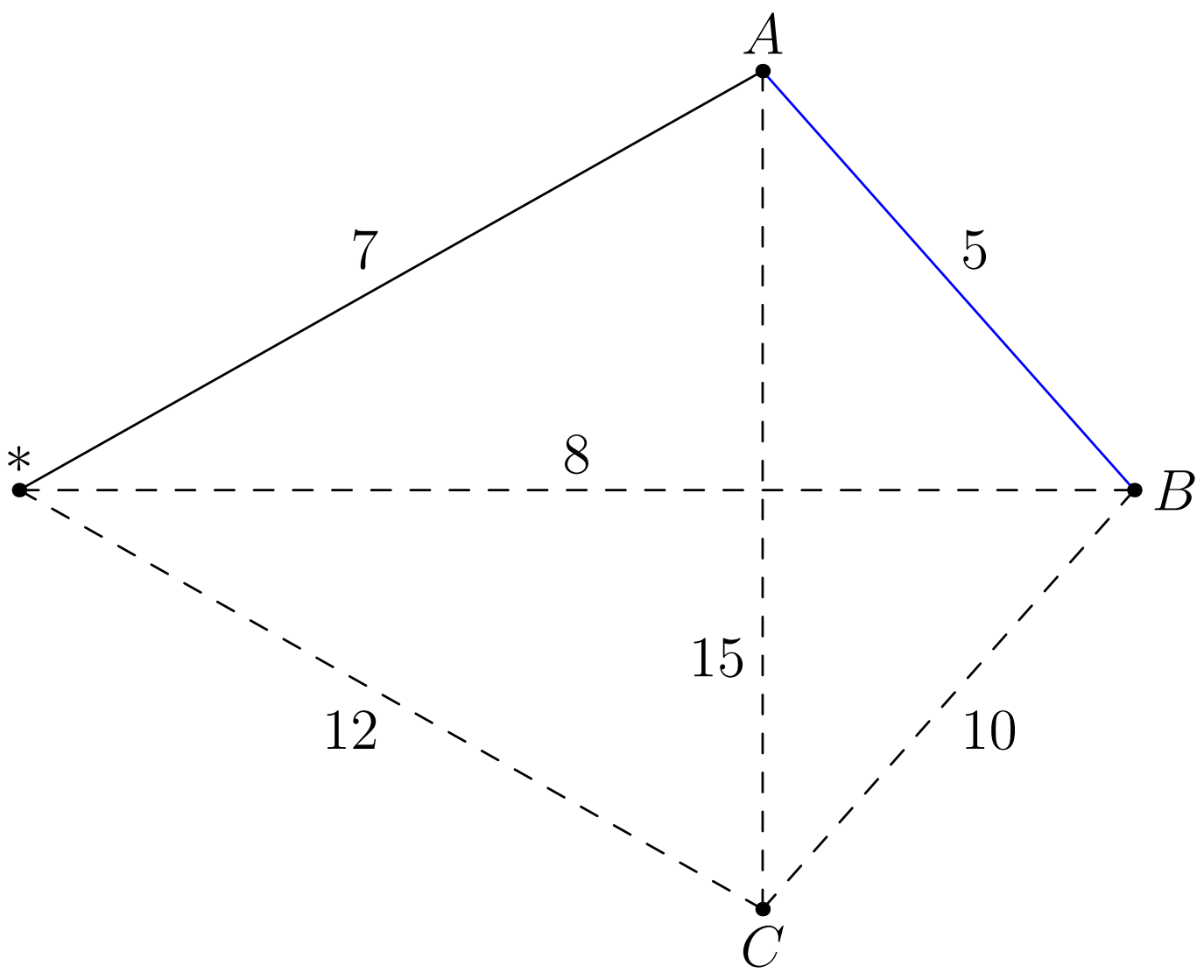
- 各ステップにおいて水が供給されていないプレイヤー → 水が供給される
- 新たに作られた辺のコスト → 新たに水が供給されたプレイヤーが負担

例における Bird の分担方法



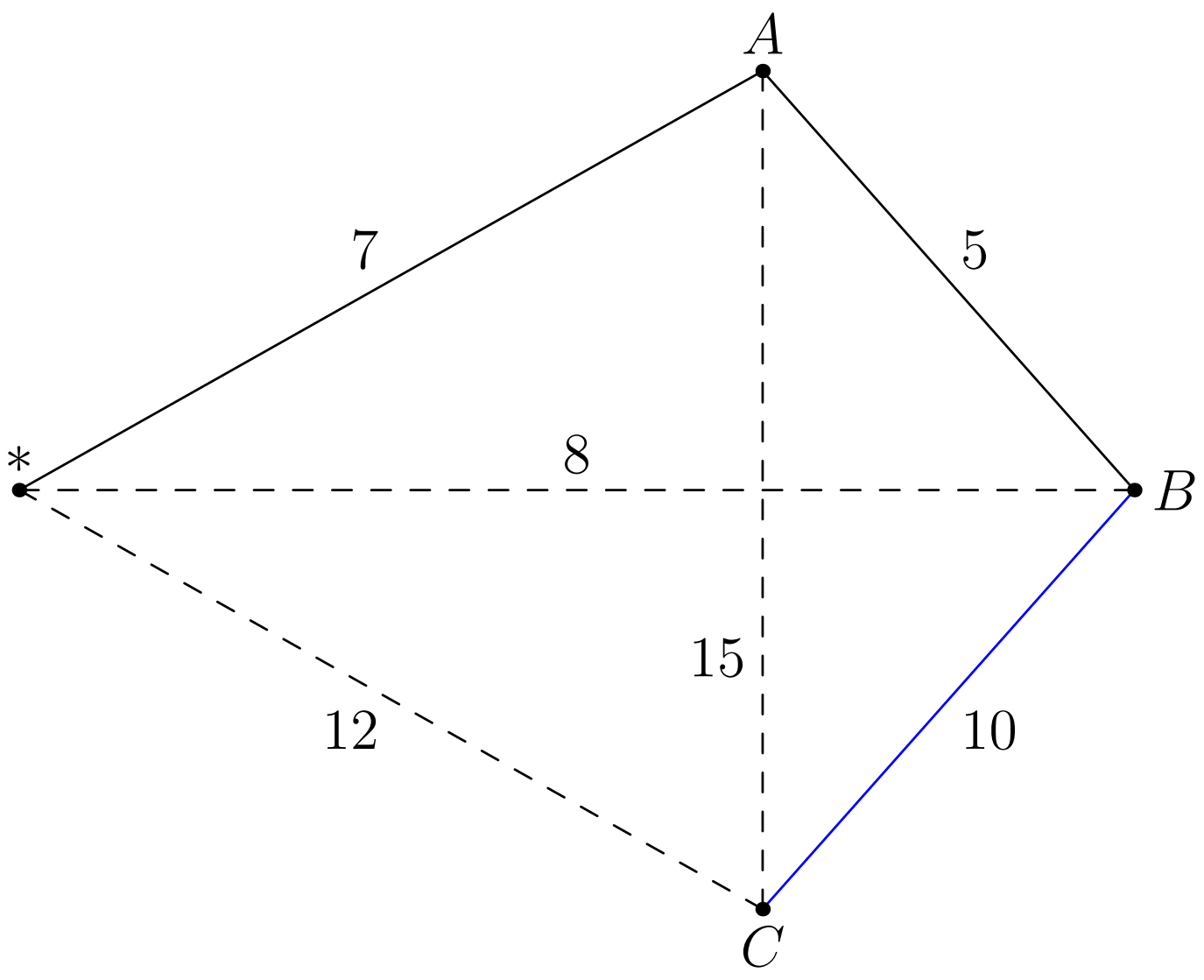
A が青い辺のコスト (7) を負担.

例における Bird の分担方法



B が青い辺のコスト (5) を負担.

例における Bird の分担方法



C が青い辺のコスト (10) を負担.

費用分担ゲーム

- Bird の方法で $(x_A, x_B, x_C) = (7, 5, 10)$ が得られた.
- この分担方法は果たして妥当なのか？
- これらの質問に答えるため，今まで学んだゲーム理論の概念と結びつける $\rightarrow$ 費用分担ゲーム

費用分担ゲームの考え方

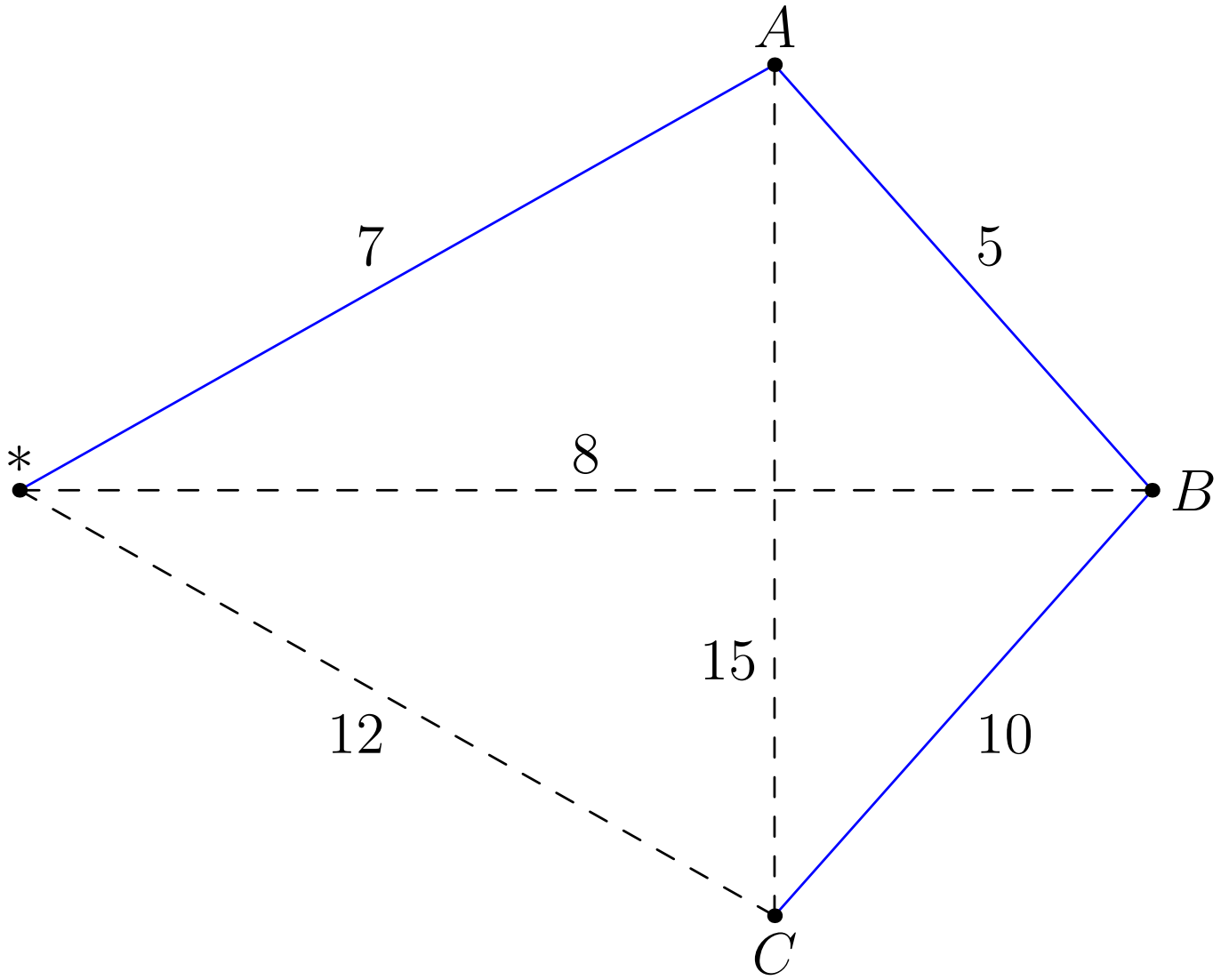
特性関数の替わりに次の費用関数cを考える：

- $c : 2^N \to \mathbb{R}$
- $c(S)$: $N \setminus S$ の辺や点を使わずに S 内のプレイヤーの全員が直接ないしは間接に水源に繋がるための最小コスト
- $c(S)$ のもう一つの解釈：S をプレイヤー全体と見なしたときの最小費用全域木に対応する総コスト

(N, c)：費用分担ゲーム

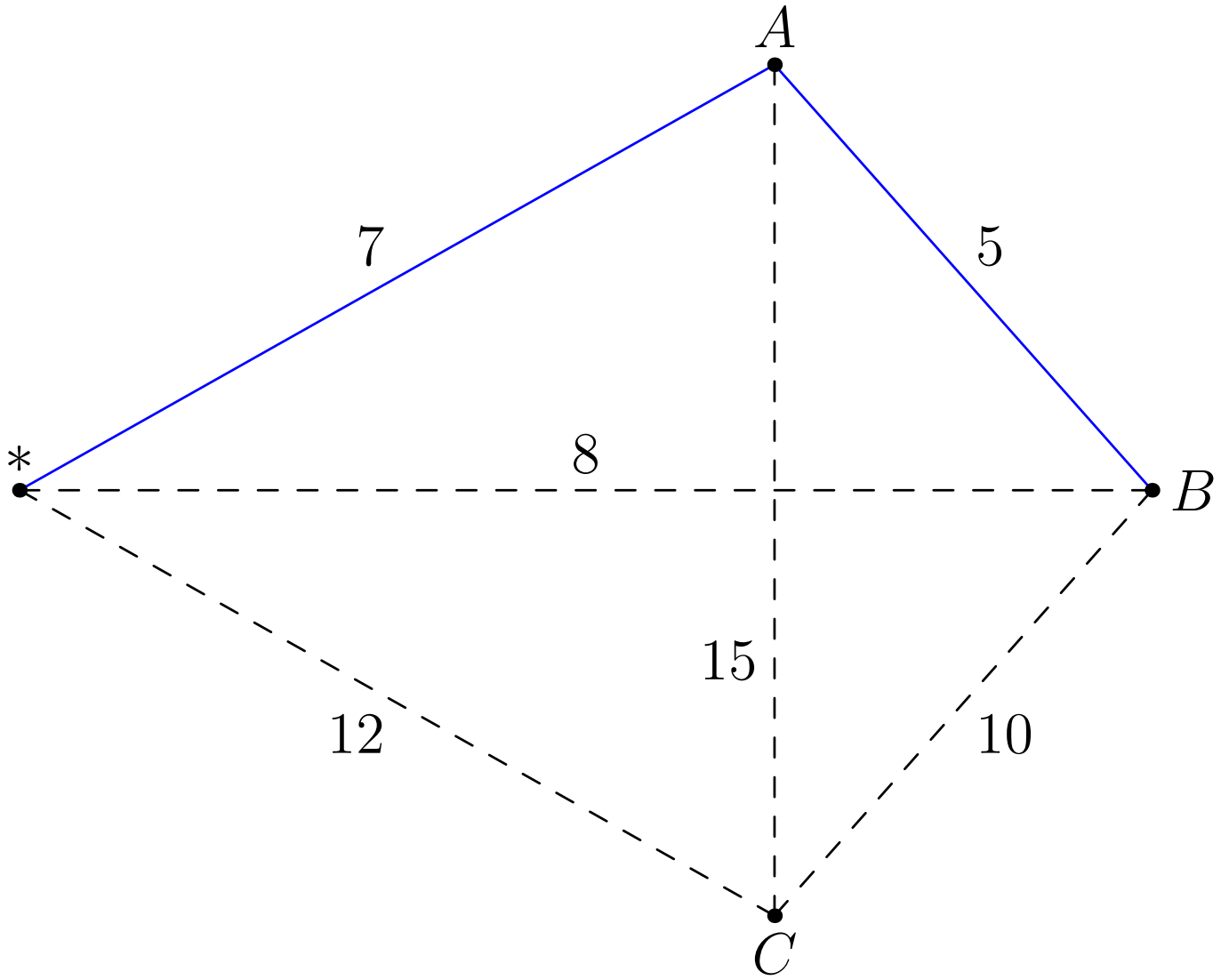
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{A, B, C\}) = 7 + 5 + 10 = 22$



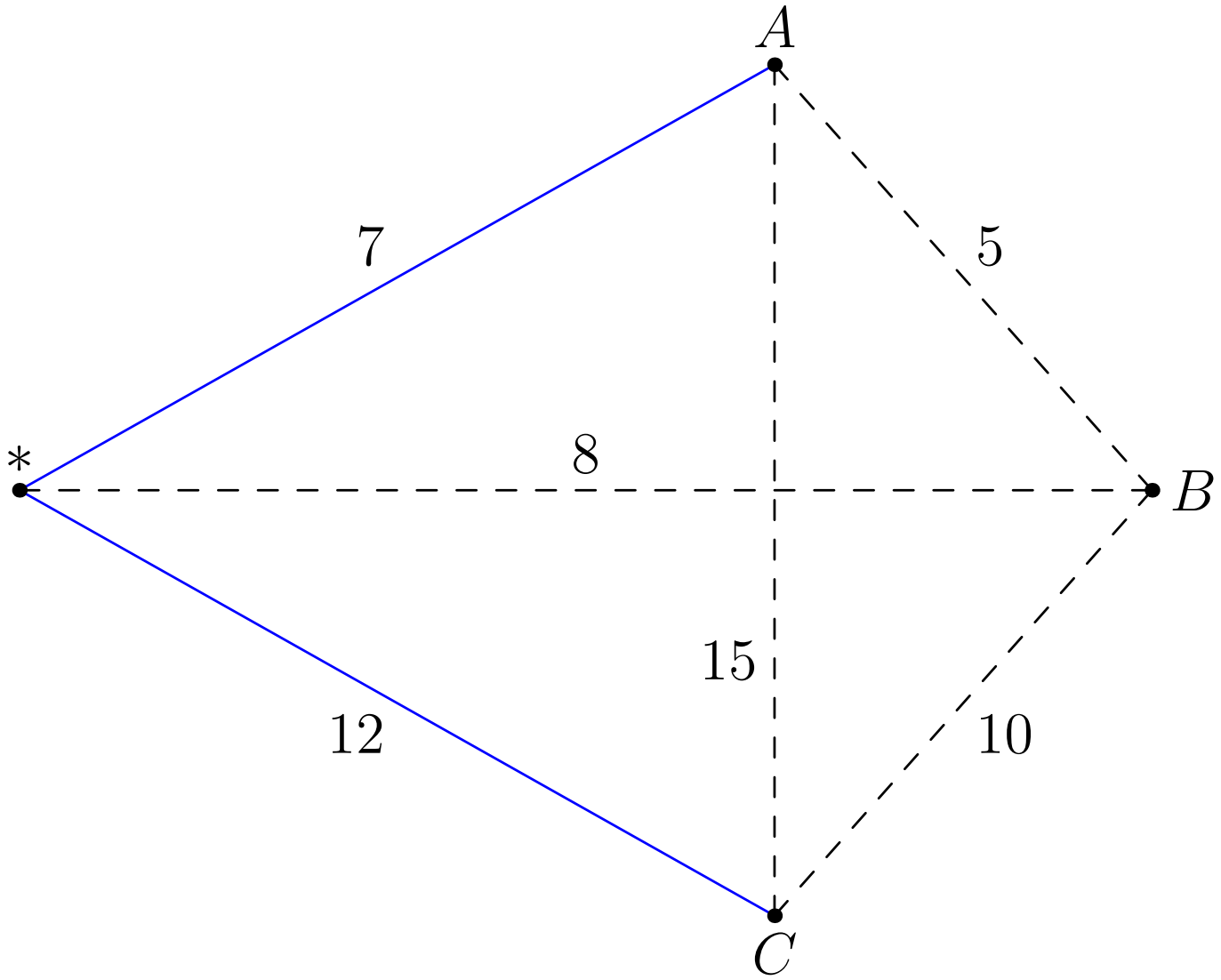
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{A, B\}) = 7 + 5 = 12$



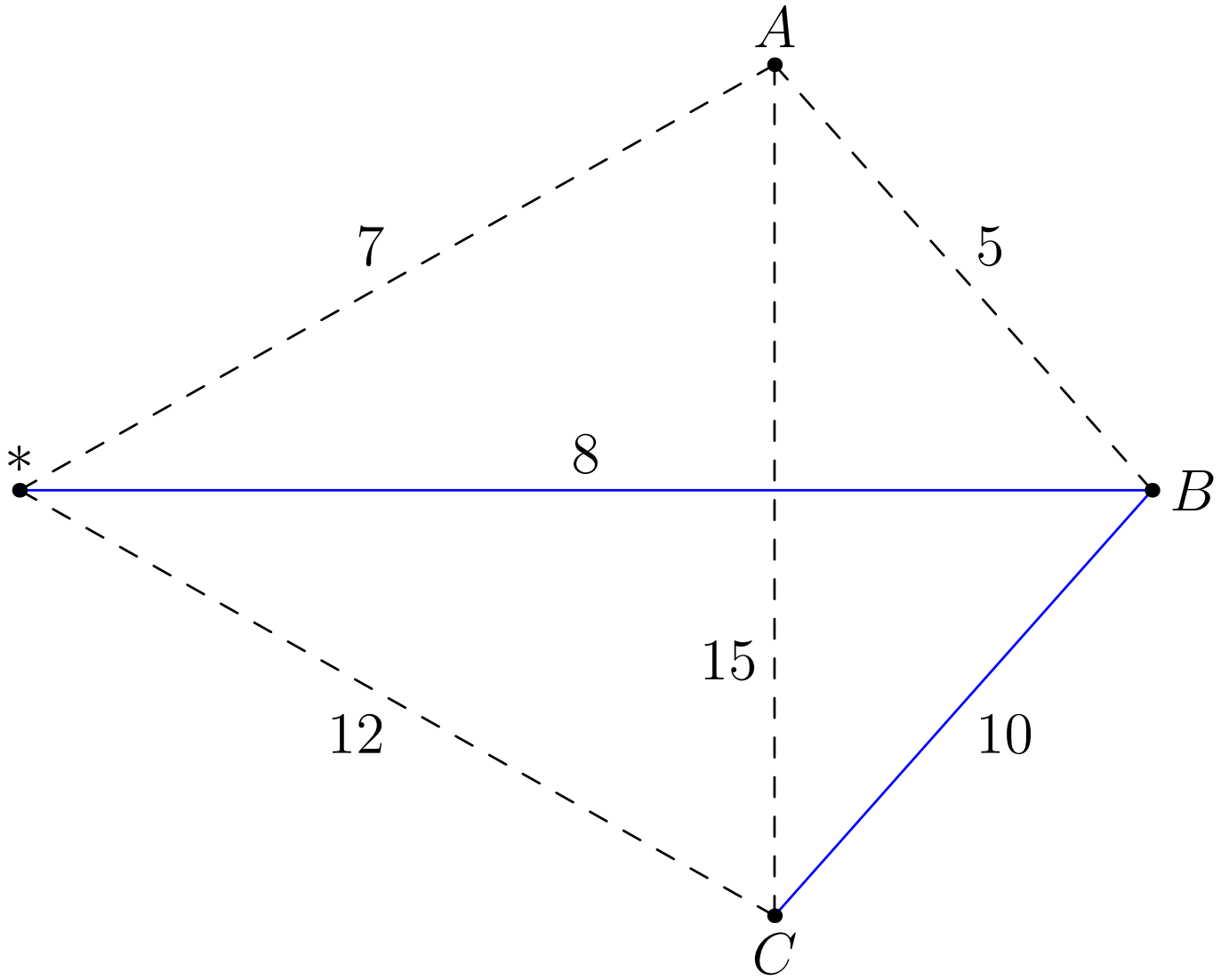
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{A, C\}) = 7 + 12 = 19$



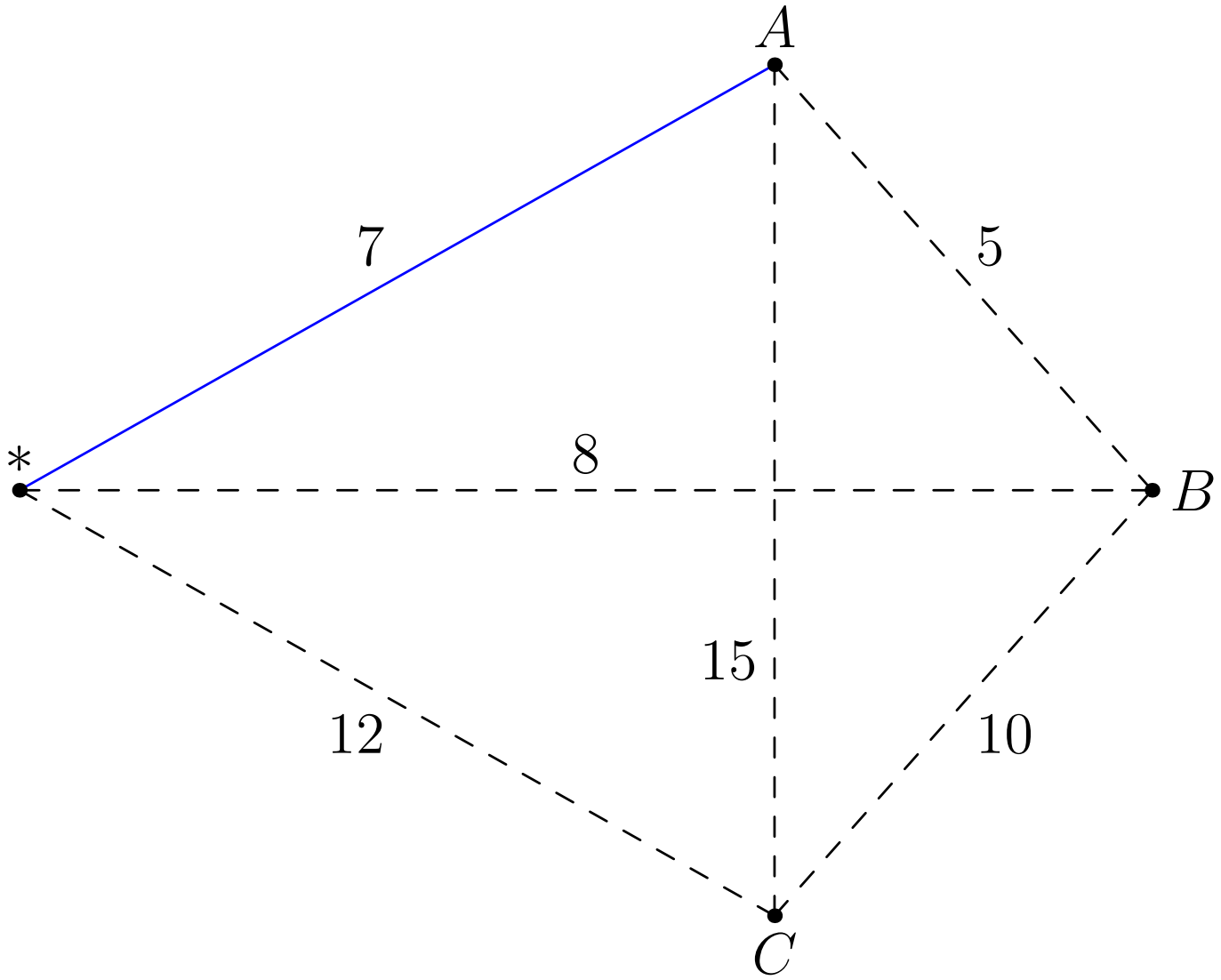
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{B, C\}) = 8 + 10 = 18$



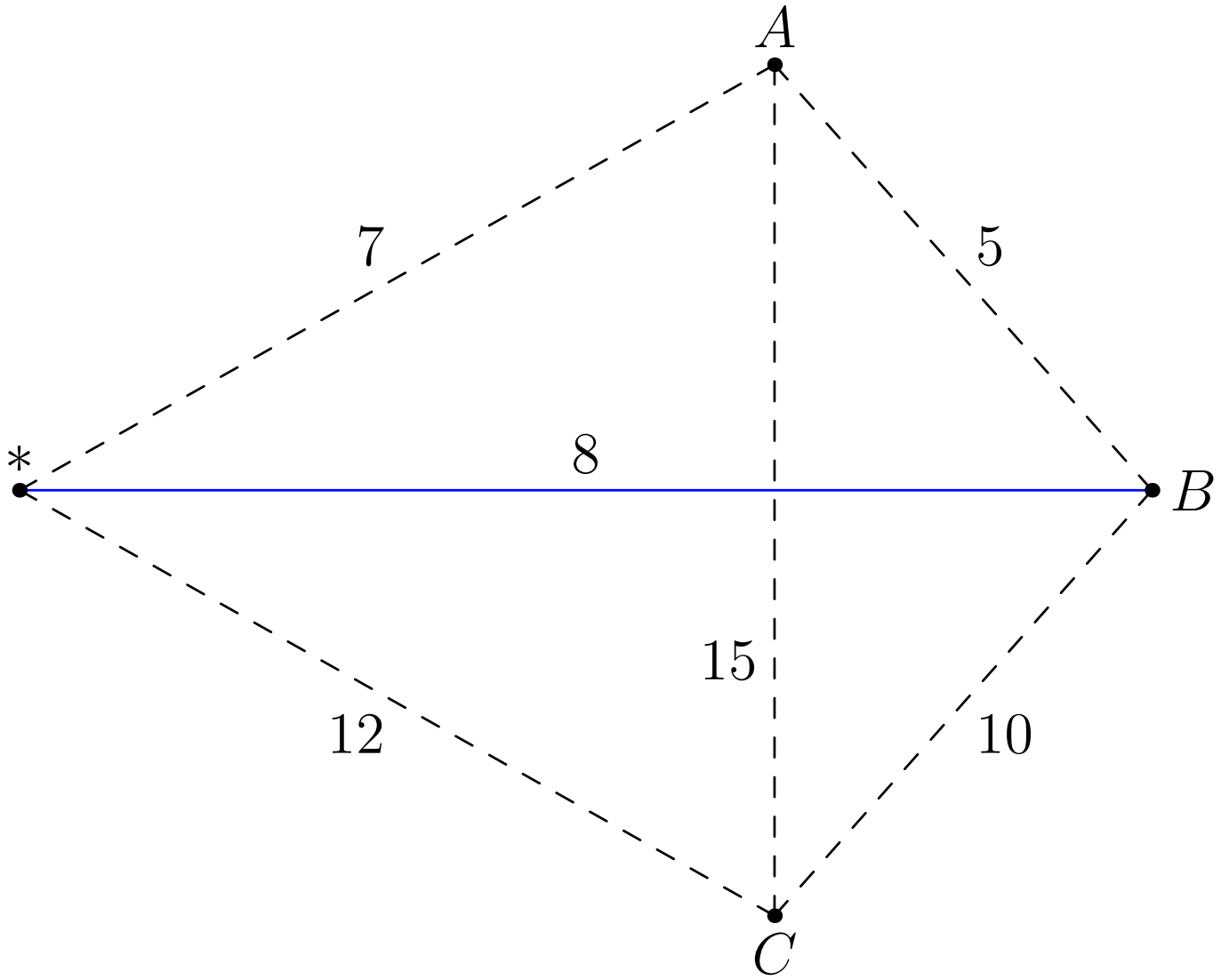
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{A\}) = 7$



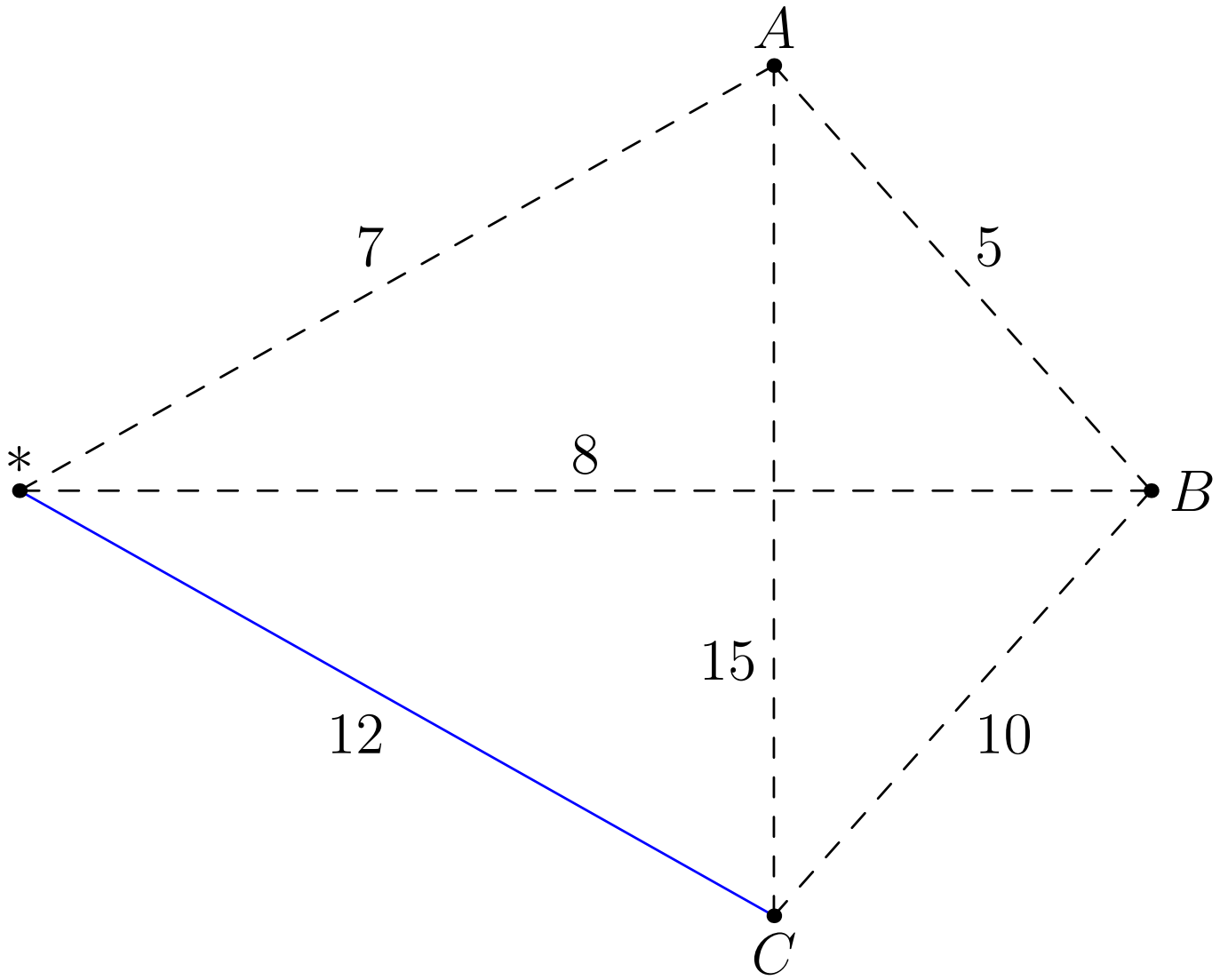
例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{B\}) = 8$



例の費用分担ゲームにおける定式化

$c(\{C\}) = 12$



例に対応する費用分担ゲーム

$$N = \{A, B, C\}$$

$$c(\{A, B, C\}) = 22$$

$$c(\{A, B\}) = 12, c(\{A, C\}) = 19, c(\{B, C\}) = 18$$

$$c(\{A\}) = 7, c(\{B\}) = 8, c(\{C\}) = 12$$

費用分担ゲームにおける個人合理性，全体合理性，提携合理性

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し

- 個人合理性：$x_i \leq c(\{i\})\ \forall i \in N$
- 全体合理性：$\sum_{i \in N} x_i = c(N)$

が満たされるとき x を費用分担ゲームの配分とよぶ．さらに，

- 提携合理性：$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S)\ \forall S \subseteq N$

をみたす配分の集合をコアとよぶ．

注意: 特性関数形ゲームのときと違い，不等号の向きが逆

Bird の分担方法とコア

例における Bird 分担方法の配分：$(x_A, x_B, x_C) = (7, 5, 10)$

$$
\begin{aligned}
x_A + x_B + x_C &= 22 = c(\{A, B, C\}) \\
x_A + x_B = 12 &= 12 = c(\{A, B\}) \\
x_A + x_C = 17 &< 19 = c(\{A, C\}) \\
x_B + x_C = 15 &< 18 = c(\{B, C\}) \\
x_A = 7 &= 7 = c(\{A\}) \\
x_B = 5 &< 8 = c(\{B\}) \\
x_C = 10 &< 12 = c(\{C\})
\end{aligned}
$$

よって，例においては Bird の分担方法により得られた配分はコアに属する．（一般的に成立する）

費用分担ゲーム $\to$ 特性関数形ゲーム

費用削減分で定義：

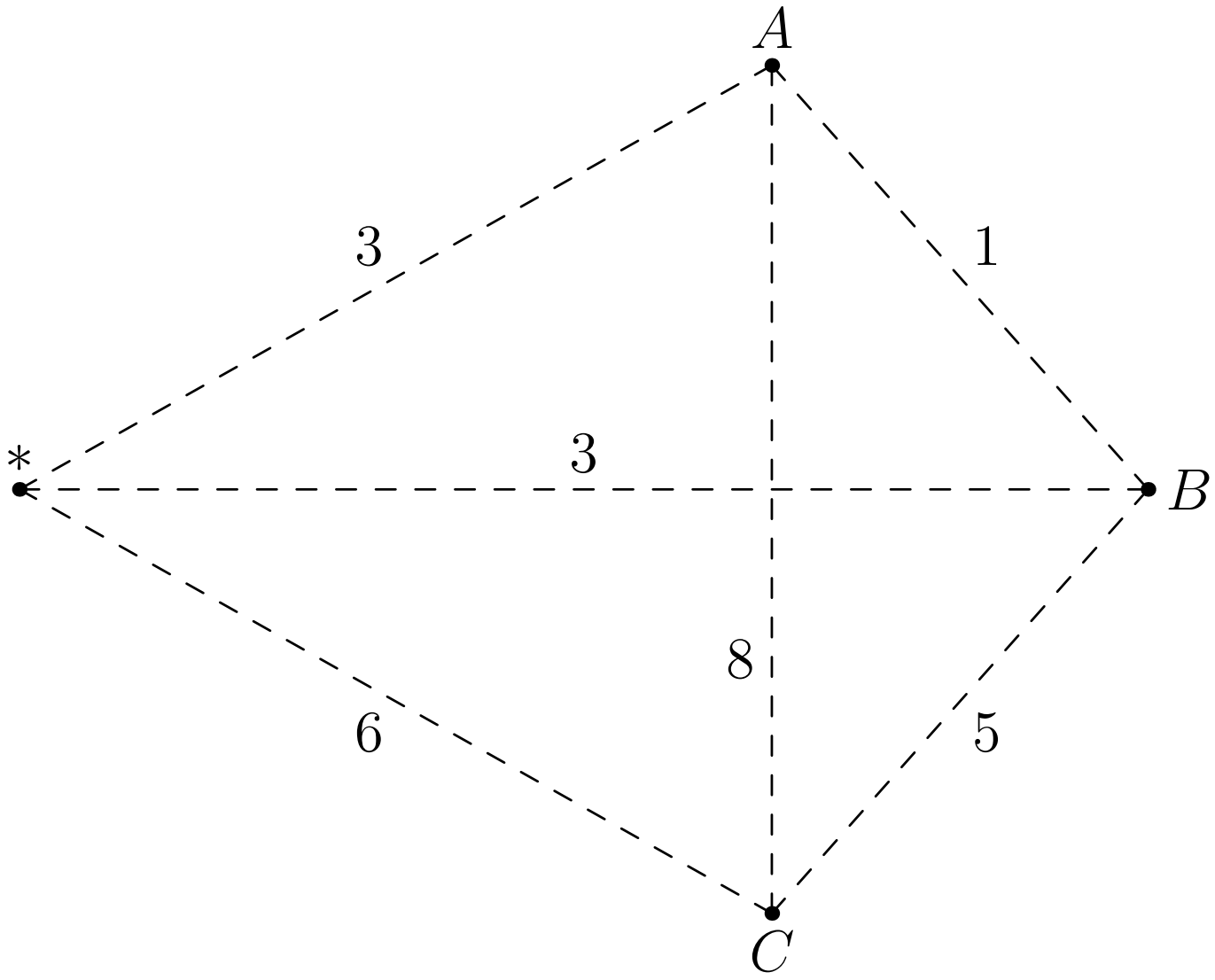
$$v(S) = -c(S) + \sum_{i \in S} c(\{i\})$$

x が (N, c) のコアに属している． $\Leftrightarrow$ $y_i = -x_i + c(\{i\})$ により定義されたベクトル $y = (y_1, \cdots, y_n)$ が (N, v) のコアに属している．

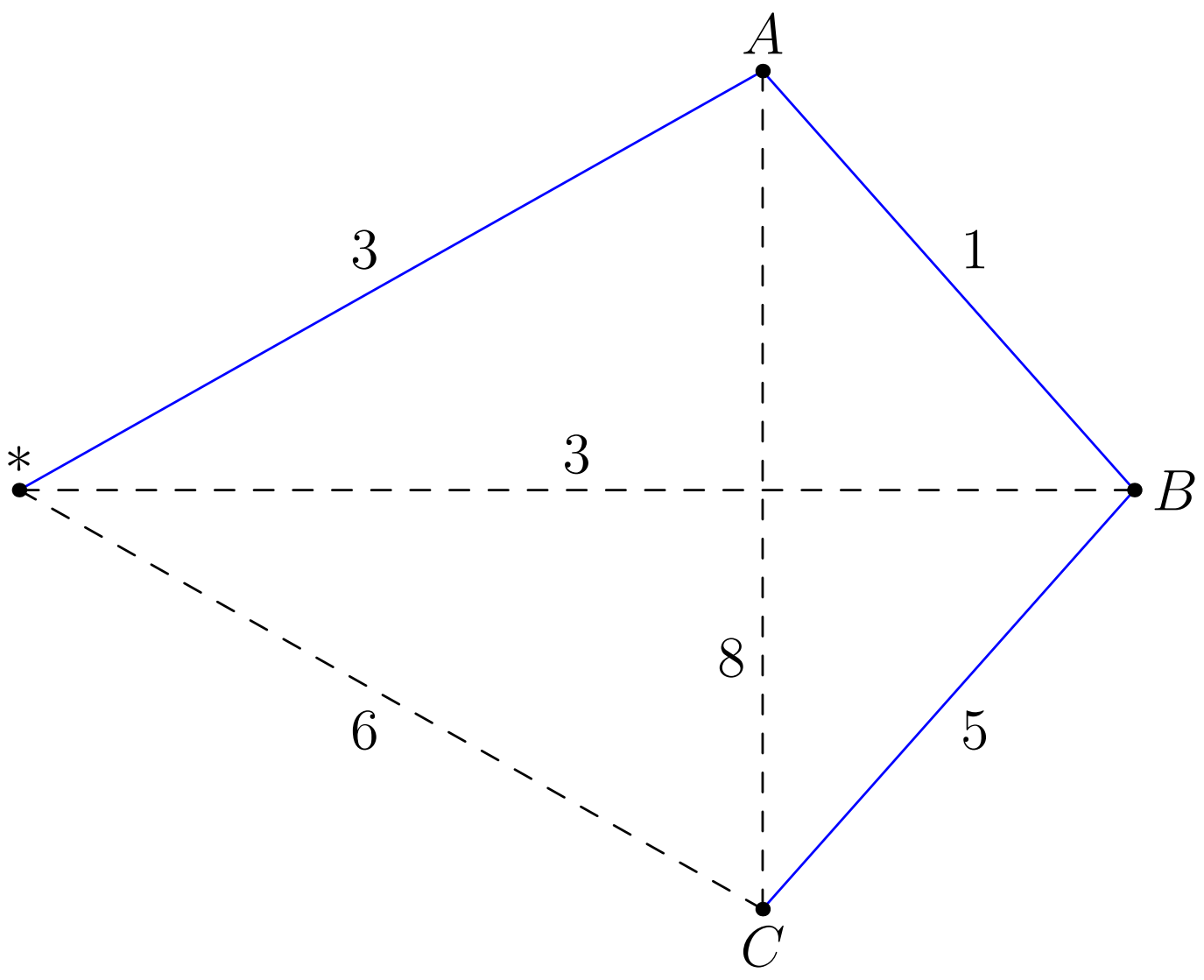
異なる 2 辺が同じコストの場合

- 今までの例では，異なる辺のコストも異なると仮定
  - 最小費用全域木が一意に求まる
  - 分担方法も一意に定まる
- 異なる 2 辺のコストが同じの場合
  - 複数の最小費用全域木が存在しうる
  - 最小費用全域木の総コストは同じのため，費用関数の値 $c(S)$ は一意に定まる
  - 選ばれる最小費用全域木により各プレイヤーのコストの負担分が変わる
    $\rightarrow$ 一意に定まらない
- この場合：すべての最小費用全域木に対し Bird の分担方法で求め，最後にその平均を取る（分母：異なる最小費用全域木の数）.
  $\rightarrow$ 改めて，Bird の分担方法と定義する

例

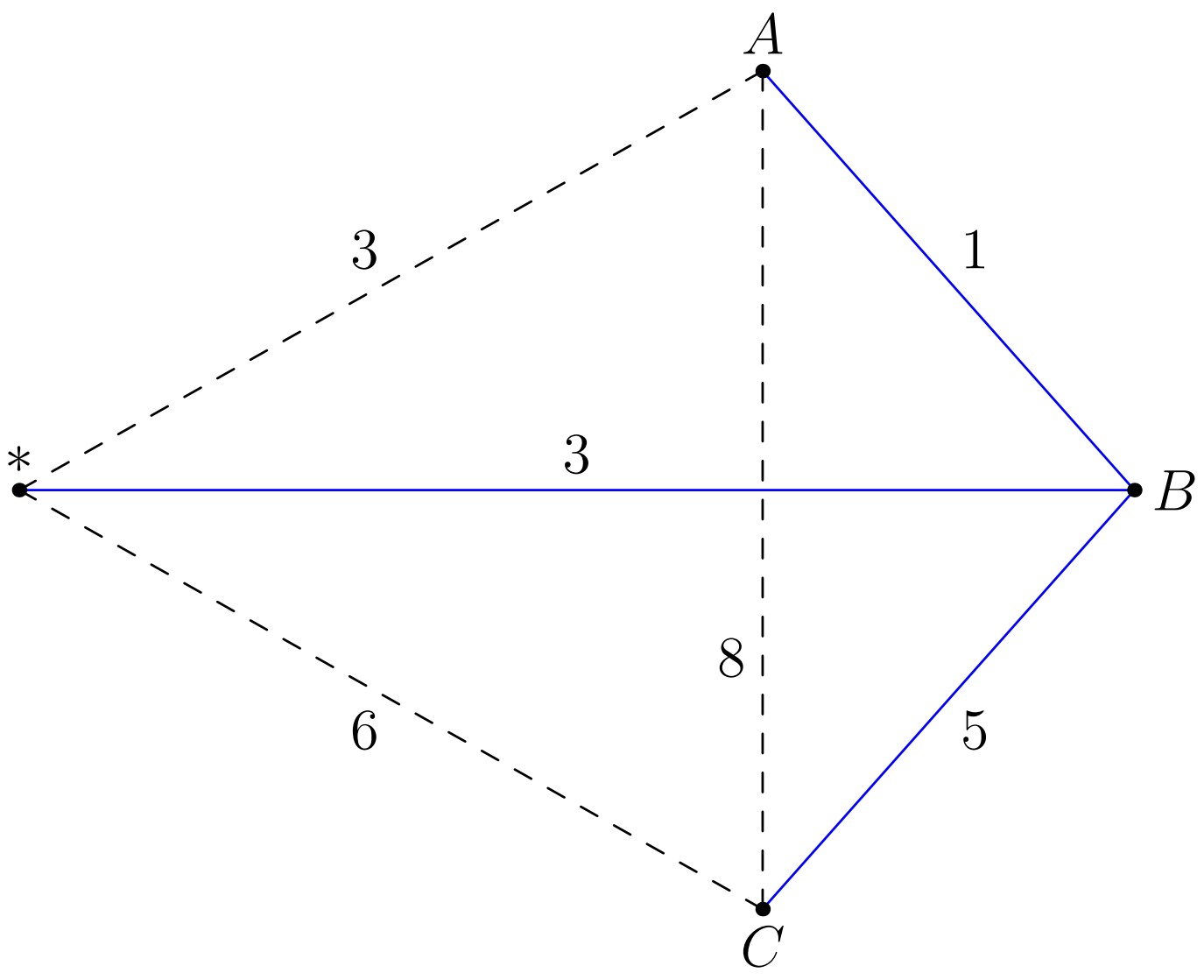


最小費用全域木（1）



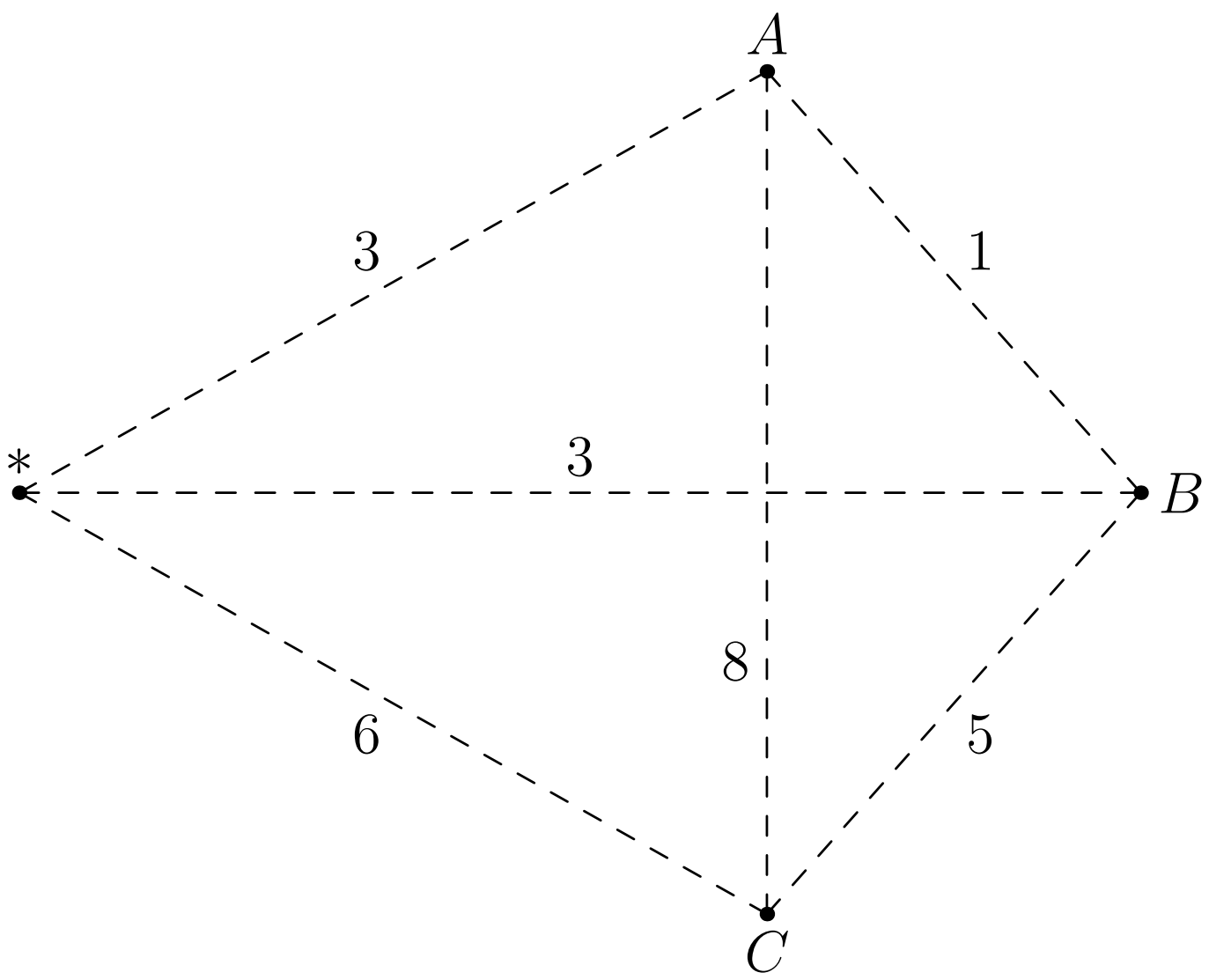
このときの費用分担：$(x_A, x_B, x_C) = (3, 1, 5)$

最小費用全域木（2）



このときの費用分担：$(x_A, x_B, x_C) = (1, 3, 5)$

例



Bird の分担方法 $\rightarrow (x_A, x_B, x_C) = (2, 2, 5)$

例に対応する費用分担ゲーム

$$N = \{A, B, C\}$$

$$c(\{A, B, C\}) = 9$$

$$c(\{A, B\}) = 4, c(\{A, C\}) = 9, c(\{B, C\}) = 9$$

$$c(\{A\}) = 3, c(\{B\}) = 3, c(\{C\}) = 6$$

コアの条件の確認

例における Bird 分担方法の配分：$(x_A, x_B, x_C) = (2, 2, 5)$

$$
\begin{aligned}
x_A + x_B + x_C &= 9 = c(\{A, B, C\}) \\
x_A + x_B = 4 &= 4 = c(\{A, B\}) \\
x_A + x_C = 7 &< 9 = c(\{A, C\}) \\
x_B + x_C = 7 &< 9 = c(\{B, C\}) \\
x_A = 2 &< 3 = c(\{A\}) \\
x_B = 2 &< 3 = c(\{B\}) \\
x_C = 5 &< 6 = c(\{C\})
\end{aligned}
$$

まとめ

- Bird の分担方法の良い点
  - 計算方法が単純
  - 費用分担分が非負
  - コアに属している
- Bird の分担方法の弱点
  - Prim のアルゴリズムによる求め方が一意ではない場合の扱い
  - 一意の場合，分担が極端（最初に繋がるプレイヤーは得をしない）

関連研究

- 解の公理化による特徴付け
- 最小費用全域木を求める他のアルゴリズム（Kruskal のアルゴリズム）に基づく分担方法（後半部分で紹介予定）
- 非協力ゲームによる分析
- ソースが二つ以上ある場合

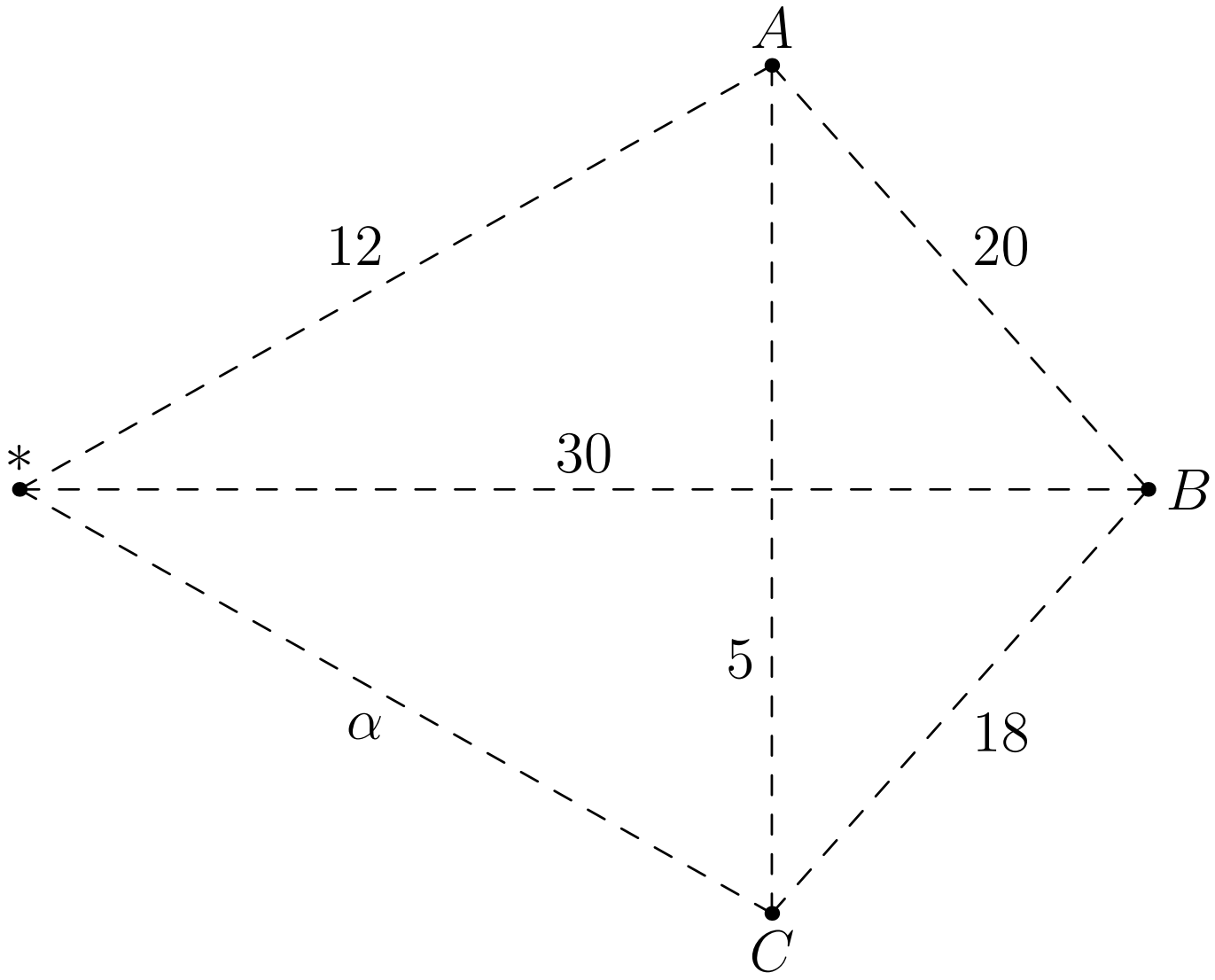
演習問題

次のスライドの図に $\alpha = 10$ と $\alpha = 15$ のそれぞれの場合において，以下の問いに答えよ．

(a) 費用分担ゲームとして定式化せよ．

(b) Bird の分担方法が (a) で定義した費用分担ゲームのコアに属していることを確かめよ．

(c) この問題を費用削減分に基づいた特性関数形ゲームとして定式化せよ．

(d) (c) で定義した特性関数形ゲームに (b) に対応する配分がコアに属していることを示せ．

演習問題（２）