交渉問題とナッシュ交渉解 (4月11日)

記号:

- B : 実現可能集合 $B \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}$: 実数全体の集合.
- d : 交渉の基準点 $d \in B$.
- 交渉問題: (B, d) の組.
- $\mathcal{B}$: 交渉問題全体の集合.

仮定:

- $u_1 > d_1$ かつ $u_2 > d_2$ をみたす $(u_1, u_2) \in B$ が存在する.
- B は凸集合かつコンパクト集合

凸集合とコンパクト集合:

- B が凸集合 $\Leftrightarrow \forall x, y \in B \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in B$.
- B がコンパクト集合 $\Leftrightarrow B$ 有界かつ閉集合
 - B が閉集合 $\Leftrightarrow$ 任意の B に属する収束する点列 $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ ($x^k \in B \forall k = 1, 2, \dots$, $x^k \rightarrow x$) に対して収束先の x が B に属している ($x \in B$).
 - B が有界 $\Leftrightarrow$ ある正の実数 M が存在し,

$$-M \leq x_i \leq M \quad i = 1, 2.$$

交渉解:

- 交渉解 – 各交渉問題 (B, d) に対し B 内の点を与える関数. $f: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2, \forall (B, d) \in \mathcal{B}, f(B, d) \in B$.
- $B^* = \{(u_1, u_2) \in B \mid u_1 \geq d_1, u_2 \geq d_2\}$. B^* も凸集合かつコンパクト集合
- ナッシュ交渉解 –

$$f^N(B, d) = \arg \max_{(u_1, u_2) \in B^*} (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$$

ただし, $\arg \max$ は最大解問題の解を表す用語である. $(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ を最大化する (u_1^*, u_2^*) は必ず唯一存在する. したがって, f^N は関数である. 即ち, (B, d) に対し $f^N(B, d)$ は $B(B^*)$ 内の一つの点である.

- 以下では, (B, d) に対し, 関数 H を以下で定義する

$$H(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2).$$

ナッシュ交渉解: B^* 上で $H(u_1, u_2)$ を最大にする (u_1, u_2) の組.

- 解が少なくとも一つ存在する – 以下の定理から導かれる.

ワイエルシュトラスの定理: $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数, $B \subset \mathbb{R}^2$ をコンパクト集合とする. そのとき, 以下を満たす $x^* \in X$, $x^{**} \in B$ が存在する.

$$f(x^*) \leq f(x) \leq f(x^{**}) \quad \forall x \in B.$$

すなわち, 以下の最大化問題

$$\max_{x \in B} f(x)$$

の解 $x^{**} \in B$ および最小化問題

$$\min_{x \in B} f(x)$$

の解 $x^* \in B$ が必ず存在する.

関数の連続性:

- $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ が $x \in B$ において連続 $\Leftrightarrow x^k \rightarrow x$ かつ $x^k \in B \quad \forall k$ なる任意の列 $(x^k)_{k=1}^\infty$ に対し, $f(x^k) \rightarrow f(x)$ が成り立つ.
- $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ が連続関数 $\Leftrightarrow f$ が任意の $x \in B$ において連続.
- 上で定義した関数 H は $B(B^*)$ 上の連続関数

解が高々一つである:

- 最大化問題の解が高々一つである – 仮に相異なる (s_1^*, s_2^*) と (t_1^*, t_2^*) が最大化問題の解とする. このとき, 以下が成立する.

$$- H(s_1^*, s_2^*) = H(t_1^*, t_2^*)$$

$$- [s_1^* > t_1^* \text{ and } s_2^* < t_2^*] \text{ or } [s_1^* < t_1^* \text{ and } s_2^* > t_2^*]$$

- このとき, (r_1^*, r_2^*) を次のように定義する:

$$r_1^* = \frac{s_1^* + t_1^*}{2}, \quad r_2^* = \frac{s_2^* + t_2^*}{2}.$$

以下が成り立ち、 (s_1^*, s_2^*) の定義に反する。

$$(r_1^*, r_2^*) \in B^*,$$

$$H(r_1^*, r_2^*) = (r_1^* - d_1)(r_2^* - d_2) > (s_1^* - d_1)(s_2^* - d_2) = H(s_1^*, s_2^*).$$

四つの公理：

公理 1 パレート最適性

- $(u_1, u_2) \in B$ が パレート最適 $\Leftrightarrow [v_1 \geq u_1 \text{ and } v_2 > u_2]$ または $[v_1 > u_1 \text{ and } v_2 \geq u_2]$ をみたす $(v_1, v_2) \in B$ が存在しない。
- 交渉解 f がパレート最適性を満たす $\Leftrightarrow$ 全ての交渉問題 (B, d) に対し、 $f(B, d)$ はパレート最適。

公理 2 対称性

- 交渉問題 (B, d) が 対称 $\Leftrightarrow [d_1 = d_2]$ かつ $[(u_1, u_2) \in B \Leftrightarrow (u_2, u_1) \in B]$
- f が対称性を満たす $\Leftrightarrow$ 全ての対称な交渉問題 (B, d) に対し $f(B, d)_1 = f(B, d)_2$ である。ただし、 $f(B, d) = (f(B, d)_1, f(B, d)_2)$ 。

公理 3 正アフィン変換からの独立性

- x に関する正アフィン関数: $\alpha x + \beta, \alpha > 0$ 。
- u_1, u_2 それぞれに対して正アフィン関数 $\alpha_1 u_1 + \beta_1, \alpha_2 u_2 + \beta_2$ を考える。 (B, d) に対し正アフィン変換された交渉問題 (B', d') を次のように定義する。

$$- d'_1 = \alpha_1 d_1 + \beta_1, d'_2 = \alpha_2 d_2 + \beta_2$$

$$- B' = \{(u'_1, u'_2) \mid \text{ある } (u_1, u_2) \in B \text{ が存在し } u'_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1, u'_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2\}$$

- f が正アフィン変換からの独立性を満たす $\Leftrightarrow (B, d)$ の任意の正アフィン変換 $u'_1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1, u'_2 = \alpha_2 u_2 + \beta_2$ と変換された交渉問題 (B', d') に対し、

$$f(B', d') = (f(B', d')_1, f(B', d')_2) = (\alpha_1 f(B, d)_1 + \beta_1, \alpha_2 f(B, d)_2 + \beta_2)$$

が成り立つ。

公理 4 無関係な結果からの独立性

- f が無関係な結果からの独立性を満たす $\Leftrightarrow T \subseteq B, d \in T$ を満たすコンパクト凸集合 T に対し $f(B, d) \in T$ が成り立つとき、 $f(T, d) = f(B, d)$ が成り立つ。

ナッシュの定理：パレート最適性，対称性，正アフィン変換からの独立性，無関係な結果からの独立性の4つの公理全てを満たす交渉解はナッシュ交渉解 f^N **唯一つ**である。

ナッシュの定理の主張：

1. f^N が4つの公理をすべて満たす。
2. ある交渉解 f が4つの公理を満たすのであれば， $f = f^N$ (関数として一致している).
 $\forall (B, d) \in \mathcal{B}, f(B, d) = f^N(B, d)$.