第 8 回：仁 (Nucleolus)

河崎　亮

工学院　経営工学系

5 月 9 日（木）

前回まで

- 特性関数形ゲーム
- 配分：個人合理性 + 全体合理性
- コア：配分 + 提携合理性
- Bird の分担方法 – 極端な配分

今回：仁 (Nucleolus)

特性関数形ゲーム（復習）

- 譲渡可能な効用（サイド・ペイメントあり）を仮定.
- N: プレイヤーの集合
- $S \subseteq N$ 提携，2^N：提携全体の集合
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ 特性関数　(characteristic function)
  $v(S)$ 提携 S が提携外の行動に関係なく独力で獲得できる最大利得
- 便宜上，$v(\emptyset) = 0$ とする.
- (N, v)：特性関数形ゲーム (TU game; game in characteristic function form)

配分：個人合理性と全体合理性（復習）

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が満たすべき条件として以下が考えられる.

- $x_i \geq v(\{i\})\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$ （個人合理性）
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ （全体合理性）

個人合理性と全体合理性を満たすベクトル
$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を配分 (imputation) とよぶ.

提携合理性とコア（復習）

コア：以下の条件を満たす $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の集合

- $x_i \geq v(\{i\})\ \forall i = 1, 2, \cdots, n$（個人合理性）
- $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$（全体合理性）
- $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subseteq N$（提携合理性）

C：コア

提携の（配分に対する）不満

定義 1.

x を配分とする．提携 S の x に対する不満とは以下の式で定義され，$e(S, x)$ と表記する．

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i \tag{1}$$

ただし，$\emptyset$ の不満は 0 とする．

注意点:

- コアの別表現:

$$C = \{x \in X | e(S, x) \leq 0 \ \forall S \subseteq N\}.$$

- 全体合理性を満たす任意の x に対し，$e(N, x) = 0$ である．

不満に基づく配分の比較（１）

例３

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

$$v(\{A, B\}) = 6, v(\{A, C\}) = 0, v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

不満に基づく配分の比較（２）

$x = (8, 5, 7)$, $y = (8, 8, 4)$.

$$
\begin{aligned}
e(\{A\}, x) &= 0 - 8 = -8 & e(\{A\}, y) &= 0 - 8 = -8 \\
e(\{B\}, x) &= 0 - 5 = -5 & e(\{B\}, y) &= 0 - 8 = -8 \\
e(\{C\}, x) &= 0 - 7 = -7 & e(\{C\}, y) &= 0 - 4 = -4 \\
e(\{A, B\}, x) &= 6 - 13 = -7 & e(\{A, B\}, y) &= 6 - 16 = -10 \\
e(\{A, C\}, x) &= 0 - 15 = -15 & e(\{A, C\}, y) &= 0 - 12 = -12 \\
e(\{B, C\}, x) &= 8 - 12 = -4 & e(\{B, C\}, y) &= 8 - 12 = -4 \\
(e(\{A, B, C\}, x) &= 20 - 20 = 0) & (e(\{A, B, C\}, y) &= 20 - 20 = 0
\end{aligned}
$$

不満に基づく配分の比較（３）

x と y の不満の値を大きいものから並び換える：

$$
\begin{aligned}
x &: (-4, \underline{-5}, -7, -7, -8, -15) \\
y &: (-4, \underline{-4}, -8, -8, -10, -12)
\end{aligned}
$$

最大不満から順に比較（ただし，N の不満は省略）．初めて値が異なる成分に着目：$-5 < -4$.

このとき，x が y より 受容的であるという．

仁の定義 (Schmeidler)

$x \in X$，$\theta(x)$ を不満を大きいものから順番に並べたベクトルとする．ただし，$\emptyset$ および N に対する不満量は考慮しない．

定義 2.

配分 x が配分 y より受容的であるとは，下記の条件を満たす k が存在することである．

- $\theta_l(x) = \theta_l(y)$, $l = 1, 2, \cdots, k-1$
- $\theta_k(x) < \theta_k(y)$.

定義 3.

以下の集合 $\mathcal{N}$ を特性関数形ゲーム (N, v) の仁と呼ぶ．

$$\mathcal{N} = \{x \in X | x \text{ より受容的な } y \in X \text{ が存在しない．}\}$$

仁の考え方と性質

- 不満の均等化 – ある提携に不満が集中しないようにする.
  - 単純な不満の最小化ではない
  - 最大不満を最小化する
  - その中から二番目に大きい不満を最小
- 仁の諸性質
  - $\mathcal{N} \neq \emptyset$
  - $\mathcal{N}$ は一点集合.

仁の求め方：例３（１）

まず，以下の問題を考える．

$$\min M$$

制約：

$$\begin{aligned}
\{A, B\} : 6 - (x_A + x_B) &\leq M \\
\{A, C\} : -(x_A + x_C) &\leq M \\
\{B, C\} : 8 - (x_B + x_C) &\leq M \\
\{A\} : -x_A &\leq M \\
\{B\} : -x_B &\leq M \\
\{C\} : -x_C &\leq M \\
x &\in X
\end{aligned}$$

２人提携に関する不等式を $x_A + x_B + x_C = 20$ を使って書き直す．

仁の求め方：例３（２）

$$\min M$$

制約：

$$\begin{aligned}
\{A, B\} &: -14 + x_C \leq M \\
\{A, C\} &: -20 + x_B \leq M \\
\{B, C\} &: -12 + x_A \leq M \\
\{A\} &: -x_A \leq M \\
\{B\} &: -x_B \leq M \\
\{C\} &: -x_C \leq M \\
& x \in X
\end{aligned}$$

仁の求め方：例３（３）

$$\min M$$

制約：

$$-M \leq x_A \leq M + 12$$
$$-M \leq x_B \leq M + 20$$
$$-M \leq x_C \leq M + 14$$

また $x_A + x_B + x_C = 20$ を考慮

$$-3M \leq x_A + x_B + x_C = 20 \leq 3M + 46$$

これらの不等式を満たす最小の $M \to M = -6$. したがって，$x_A = 6$. x_B, x_C の値はまだ定まっていない.

仁の求め方：例３（４）

$$
\begin{aligned}
\{A, B\} : -x_B &\leq -6 \\
\{A, C\} - (6 + x_C) &\leq -6 \\
\{B, C\} : -6 &\leq -6 \\
\{A\} : -6 &\leq -6 \\
\{B\} : -x_B &\leq -6 \\
\{C\} : -x_C &\leq -6
\end{aligned}
$$

$\{B, C\}$ および $\{A\} \rightarrow$ 不満 $= -6$. この二つの制約を外し次の最小化問題を考える.

仁の求め方：例３（５）

M' を二番目に大きい不満の値

$$\min M'$$

制約：

$$\begin{aligned} \{A, B\} &: -x_B \leq M' \\ \{A, C\} &: -6 - x_C \leq M' \\ \{B\} &: -x_B \leq M' \\ \{C\} &: -x_C \leq M' \end{aligned}$$

$x_B + x_C = 20 - x_A = 14$ を使う．

$$-M' \leq x_B, x_B \leq M' + 20, x_B \leq M' + 14,$$

よって，$M' = -7$ が最小であり，$x_B = 7$, $x_C = 14 - x_B = 7$ が得られる．

仁による費用分担

特性関数形ゲームの仁 $= (6, 7, 7)$.

値 = 費用軽減分を踏まえ，総費用１億７０００万円を各自治体は以下のように分担する.

- A : $= 7000 - 600 = 6400$ 万円
- B : $= 5500 - 700 = 4800$ 万円
- C : $= 6500 - 700 = 5800$ 万円

宿題第３回

課題：宿題３を参照

提出期限：５月１６日（木）授業開始時