特性関数形ゲームとコア

I. 記号

1. $N = \{1, 2, \cdots, n\}$: プレイヤーの集合
2. $S \subseteq N$: 提携, $2^N = \{S | S \subseteq N\}$: 提携全体の集合
3. $v : 2^N \to \mathbb{R}$ 特性関数
4. (N, v): 特性関数形ゲーム
5. X: ゲーム (N, v) における配分の集合（定義は II. 4.）

II. 用語

1. $v(S)$: $N \setminus S$ がどのように行動しても S が独力で得られる最大利得．$v(S)$ は S の提携値とも呼ぶ．
2. (N, v) が優加法性を満たす $\Leftrightarrow$ $S \cap T = \emptyset$ なる任意の S と T に対し，

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T).$$

3. (N, v) が単調性を満たす $\Leftrightarrow$ $S \subseteq T$ なる任意の提携 S と T に対し，

$$v(S) \leq v(T).$$

4. $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ が配分である $\Leftrightarrow$

$$x_i \geq v(\{i\}),\ \forall i \in N, \text{（個人合理性）}.$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N), \text{（全体合理性）}.$$

5. (N, v') と (N, v) が戦略上同等である $\Leftrightarrow$ ある実数 $a > 0$ と $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し，任意の $S \subseteq N$ に対して以下が成り立つ．

$$v'(S) = av(S) + \sum_{i \in S} b_i$$

(N, v) の配分 x に対応する (N, v') の配分は，以下で与えられるベクトル $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$．

$$x'_i = ax_i + b_i.$$

6. (N,v) のゼロ正規化: $v'(\{i\})=0$ を満たす (N,v) と戦略上同等な特性関数形ゲーム (N,v') を (N,v) のゼロ正規化と呼ぶ．具体的には，$a=1$, $b_i=-v(\{i\})$ とおけば得られる．

III. コア

- 配分の部分集合 C が (N,v) のコア ⇔

$$C=\{x\in X|\sum_{i\in S}x_i\geq v(S)\ \forall S\subseteq N\}.$$

IV. 支配によるコア

1. 配分 y が配分 x を提携 $S\subseteq N$ を通じて支配する ⇔ 以下の二条件を満たす

$$\sum_{i\in S}y_i\leq v(S),$$

$$y_i>x_i,\ \forall i\in S.$$

このとき，$y\ \mathrm{dom}_S\ x$ を記す．

2. 以下の集合を支配に基づくコアと呼び，DC と表す．

$$DC=\{x\in X|y\ \mathrm{dom}_S\ x \text{ を満たす } y\in X \text{ と } S\subseteq N \text{ が存在しない }\}.$$

3. $C\subseteq DC$ は常に成り立つ．(N,v) が優加法性を満たすならば $DC\subseteq C$ も成り立ち $C=DC$ が得られ，二つのコアの概念は一致する．

V. 例 1 の一般化：投票ゲーム

1. 投票ゲームの定義：以下の三つの条件を満たす
   (a) $v(N)=1$ and $v(S)=1$ or $v(S)=0$
   (b) (N,v) が単調性を満たす
   (c) $v(S)=1\Rightarrow v(N\setminus S)=0$

2. 拒否権を持つプレイヤー i: $v(S)=1\Rightarrow i\in S$

3. 投票ゲーム (N,v) のコアが非空であるための必要十分条件は，拒否権を持つプレイヤーが存在することである．このとき，コアに属している任意の配分 x において，拒否権を持たない任意のプレイヤー i に対し $x_i=0$ である．

4. i が独裁者：$i\in S\Rightarrow v(S)=1$