

# 第4回：特性関数形ゲームとコア

河崎 亮

工学院 経営工学系

4月15日（月）

# 前回と今回のあらすじ

前回まで：ナッシュ交渉問題

- 2人協力ゲーム
- ナッシュ交渉解 – 定義式，公理
- 譲渡可能な効用 (Transferable Utility (TU))

今回：多人数協力ゲーム – 特性関数形ゲーム

- 特性関数形ゲームの定義およびコアの定義
- 例を紹介（武藤 (2001) より抜粋）

# 特性関数形ゲーム：用語の定義

- 譲渡可能な効用（サイド・ペイメントあり）を仮定.
- $N$ : プレイヤーの集合
- $S \subseteq N$  提携,  $2^N$ : 提携全体の集合
- $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  特性関数 (characteristic function)  
 $v(S)$  提携  $S$  が提携外の行動に関係なく独力で獲得できる  
最大利得
- 便宜上,  $v(\emptyset) = 0$  とする.
- $(N, v)$ : 特性関数形ゲーム (TU game; game in characteristic function form)

# 例 1 : 投票

- プレイヤー A, B, C で 100 万円を分配. 分配方法を投票で決める.
- 四つの選択肢
  - 「3 人で分ける」
  - 「A と B 二人で分ける」
  - 「A と C 二人で分ける」
  - 「B と C 二人で分ける」
- 各人 1 票, 過半数で決定

このとき, プレイヤーたちはどのように協力し, 100 万円をどのように分配するか.

# 例 1 の特性関数形ゲーム表現

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

$$v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 1$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(単位 : 1 0 0 万円)

# 例 1'

例 1 を以下のように変更.

- プレイヤー A は 2 票. プレイヤー B, C は 1 票.
- 「過半数」 = 3 である.

例 1' の特性関数形ゲーム

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 1$$

$$v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = 1, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(単位 : 1 0 0 万円)

A の協力なしでは 0 円  $\rightarrow$  A は「拒否権を持つプレイヤー」

## 例 2 : 非分割財の売買

- プレイヤーA (売り手) : 家を所持, 1000万円の価値 (1000万円を下回る値段では売らない)
- プレイヤーB (買い手) : 家は1200万円の価値 (最高でも1200万円払ってもいい)
- プレイヤーC (買い手) : 家は1500万円の価値 (最高でも1500万円払ってもいい)

プレイヤー達の間ではどのような取引が行われ, プレイヤーAの家はどの価格で誰に売られるか.

## 例 2 の特性関数形ゲーム表現

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 5$$

$$v(\{A, B\}) = 2, v(\{A, C\}) = 5, v(\{B, C\}) = 0$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(単位 : 1 0 0 万円)



## 例 3 :水道管建設の費用分担

- 自治体 A,B,C が共通の水源から水を供給するため，水道管を設置.
- 水源から直接それぞれの自治体が水道管を引いた場合の設置費用は
  - 水源 → A : 7 0 0 0 万円
  - 水源 → B : 5 5 0 0 万円
  - 水源 → C : 6 5 0 0 万円

## 例 3 (2)

ここで自治体同士で協力し合うことを考える。例：自治体 A が水源からの水道管を引き、B が A からの水道管を引くことにより協力し合う可能性も考えられる。合計コストはそれぞれが単独で水道管を設置するより低くなる可能性がある。この例では、

- A と B が協力：合計 1 億 1 9 0 0 万円
- A と C が協力：合計 1 億 3 5 0 0 万円
- B と C が協力：合計 1 億 1 2 0 0 万円
- A と B と C が協力：合計 1 億 7 0 0 0 万円

どの自治体がどう協力し、それぞれの費用の負担分をどう決めるか。

### 例3 (3)

$$N = \{A, B, C\}$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

$$v(\{A, B\}) = 6, v(\{A, C\}) = 0, v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

(単位 : 100万円)

$v(\{A, B\})$  の導出方法 :

- A と B が協力: 1億1900万円
- それぞれ単独の場合の合計コスト :

$$7000万 + 5500万 = 1億2500万円.$$

$$1億2500万 - 1億1900万 = 600万円得,$$
$$v(\{A, B\}) = 6.$$

# 目的

今までの事例に共通する問題：

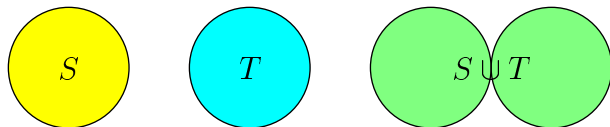
1. どのような提携が形成されるか？
2. 形成された提携内でどのように利得を分配するか？

# 優加法性

$S \cap T = \emptyset$  となる任意の提携  $S, T$  に対して

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

が成り立つとき、 $v$  は優加法性 (**superadditivity**) を満たすとい  
い  $(N, v)$  は優加法的ゲームであるという。



$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

優加法性  $\Rightarrow$  全体提携  $N$  が形成される。

# 目的

- どのような提携が形成されるか？ → 全体提携  $N$  が形成される.
- 形成された提携内でどのように利得を分配するか？ → どのように  $v(N)$  を分配するか？

したがって、二つ目の問題に着目する.

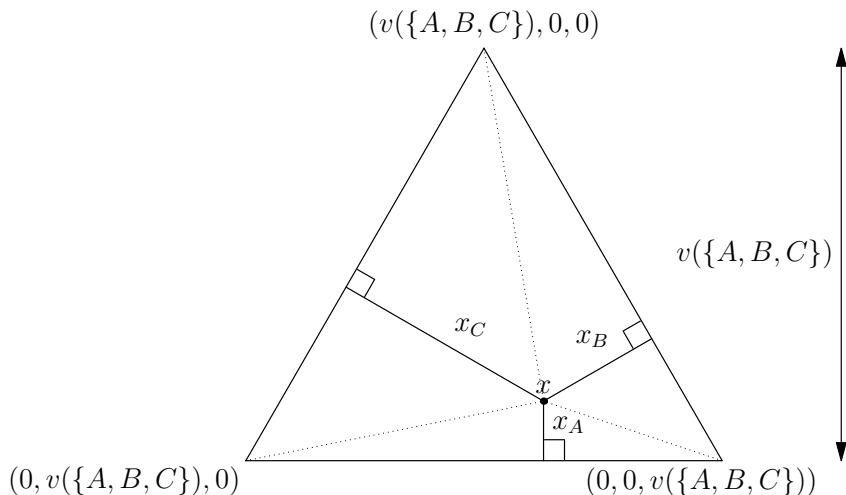
# 配分：個人合理性と全体合理性

プレイヤーの集合を  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  とする  
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  が満たすべき条件として以下が考えられる.

- $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  (個人合理性)
- $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$  (全体合理性)

個人合理性と全体合理性を満たすベクトル  
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  を配分 (imputation) とよぶ.

### 3人のケース：配分の図



$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$  の場合:

配分全体の集合 = 正三角形の边上および内部.



# 提携合理性とコア

## 定義 1.

コア：以下の条件を満たす  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  の集合

- $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  (個人合理性)
- $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$  (全体合理性)
- $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N$  (提携合理性)

記号： コアを  $C$  で表す.

# 例 1 のコア

個人合理性と全体合理性：

- $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
- $x_A + x_B + x_C = 1$

提携合理性：

$$x_A + x_B \geq 1$$

$$x_A + x_C \geq 1$$

$$x_B + x_C \geq 1$$

これらの条件を同時に満たす  $(x_A, x_B, x_C)$  は存在しない.

$C = \emptyset$ .

(一方、例 1' のコアは非空である.)

## 例 2 のコア

個人合理性と全体合理性：

- $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
- $x_A + x_B + x_C = 5$

提携合理性：

$$x_A + x_B \geq 2 \rightarrow x_C \leq 3$$

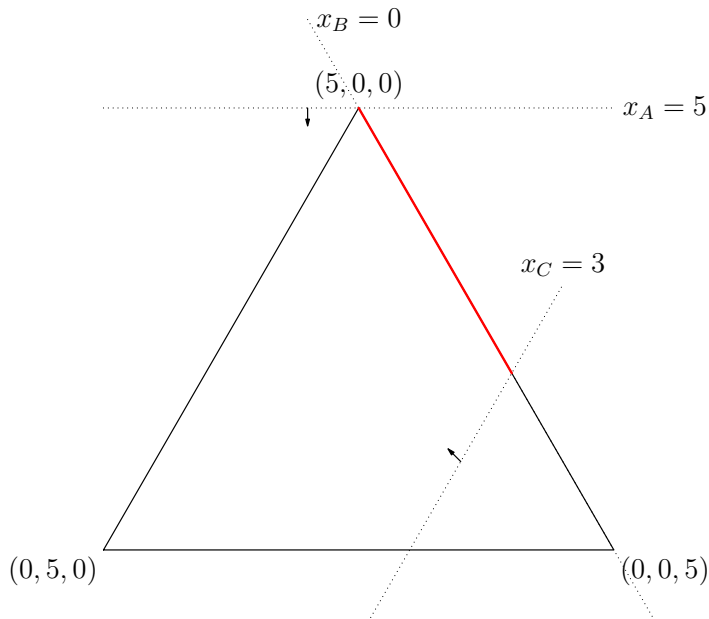
$$x_A + x_C \geq 5 \rightarrow x_B \leq 0$$

$$x_B + x_C \geq 0 \rightarrow x_A \leq 5$$

注意：“ $\rightarrow$ ”においては，全体合理性を使っている．

$$C = \{(x_A, x_B, x_C) \mid x_A + x_B + x_C = 5, 0 \leq x_A \leq 5, x_B = 0, \\ 0 \leq x_C \leq 3\}$$

## 例 2 のコアの図



## 例 3 のコア

個人合理性と全体合理性：

- $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0$
- $x_A + x_B + x_C = 20$

提携合理性：

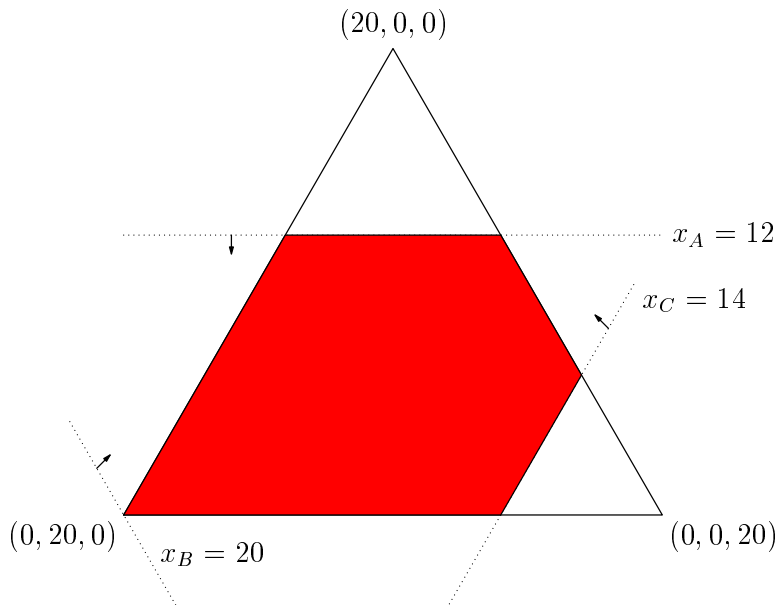
$$x_A + x_B \geq 6 \rightarrow x_C \leq 14$$

$$x_A + x_C \geq 0 \rightarrow x_B \leq 20$$

$$x_B + x_C \geq 8 \rightarrow x_A \leq 12$$

$$C = \{(x_A, x_B, x_C) | x_A + x_B + x_C = 20, 0 \leq x_A \leq 12, 0 \leq x_B \leq 20, \\ 0 \leq x_C \leq 14\}$$

# 例 3 のコアの図



## 補足：支配に基づくコア (DC)

### 定義 2.

$(N, v)$  の配分  $x$  が別の配分  $y$  に**支配される**とは、ある提携  $S$  が存在し、以下の二つの条件を満たすときである。

- $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$
- $y_i > x_i \quad \forall i \in S$

解釈：提携  $S$  により配分  $x$  が配分  $y$  に置き換えられてしまう。

支配に基づくコア (DC)：支配されない配分の集合  
特性関数  $v$  が優加法性を満たすとき  $\Rightarrow$

$$DC = C.$$

# コアに関するメリット・デメリット

メリット：

- 定義が（比較的）わかりやすい → 扱いやすい
- （集合としての）数学的な性質（凸集合，閉集合，etc.）

デメリット：

- コアが空集合になることもある。（例 1）
- コアが大きい集合になることもある。（例 3）



## 宿題第 2 回

課題：宿題 2 を参照

提出期限：4 月 1 8 日（木）授業開始時

表紙 2（OCW-i からダウンロード）を使い，左上にホチキス  
でとめること．