第 7 回メモ

宿題 1 番の答えは

$A_V = \dfrac{v_{out}}{v_{in}} = -g_m R \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\omega_2}{j\omega}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)} = -g_m R \dfrac{\dfrac{j\omega}{\omega_2}}{\left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_2}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)}$ という形になっていた。この答えを表示するときに、実際には

$\omega << \omega_1$ では、$1+j\dfrac{\omega}{\omega_1} \to 1$　　$\omega >> \omega_2$ では、$1+\dfrac{j\omega}{\omega_2} \to \dfrac{j\omega}{\omega_2}$　と近似できる考え方を使える。

$\omega_2 << \omega << \omega_1$ の領域では、$A_V = -g_m R$ とできる。

また、$\omega << \omega_1$ では、ω_1 の極は無視でき、$A_V \simeq -g_m R \dfrac{\dfrac{j\omega}{\omega_2}}{1+\dfrac{j\omega}{\omega_2}}$　と近似でき、

$\omega >> \omega_2$ では、ω_2 の極は無視でき、$A_V = -g_m R \dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}$　と近似できる考え方を使える。

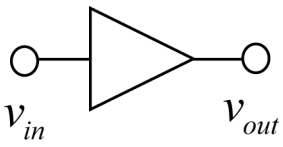
この考え方は $A_V = \dfrac{k_1}{k_2 + \left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1+\dfrac{\omega_2}{j\omega}\right)}$ という形になった時に便利である。（演習でやる）

また、$\omega << \omega_1$ では、$A_V \simeq \dfrac{k_1}{k_2 + \left(1+\dfrac{\omega_2}{j\omega}\right)} = \dfrac{\dfrac{k_1}{k_2+1}}{1+\dfrac{\omega_2'}{j\omega}}$　　ただし $\omega_2' = \dfrac{\omega_2}{k_2+1}$　と近似でき、

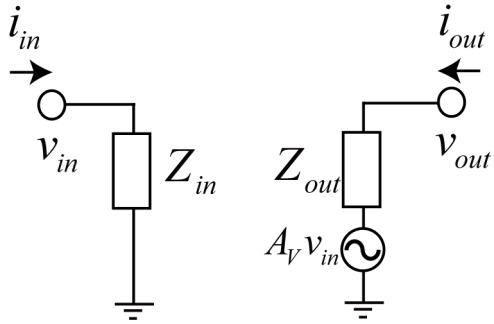
$\omega >> \omega_2$ では、$A_V \simeq \dfrac{k_1}{k_2 + \left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_1}\right)} = \dfrac{\dfrac{k_1}{k_2+1}}{1+\dfrac{j\omega}{\omega_1'}}$　　ただし $\omega_1' = \omega_1(k_2+1)$　と近似できる。

宿題 2 番の様に入力側と出力側の間に結合がある（この場合には C_{gd} による）場合、その影響は大きくなる。$B_v v_{out}$ が出るといってもよいが、簡単化ができなくなる。

そこで C_{gd} を除いた時で



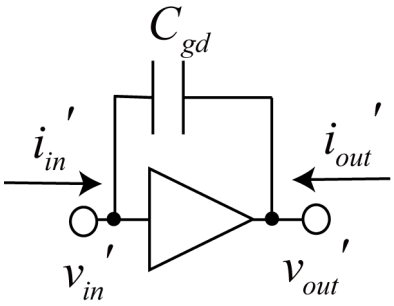
を



、

とおいて、*unilateral*

の成分である $Z_{in}(=\dfrac{1}{j\omega C_{gs}})$ $Z_{out}(=\dfrac{1}{g_{ds}})$ と $A_V(=-\dfrac{g_m}{g_{ds}})$ (()内はソース接地の場合)として求め、そこに C_{gd} を入れた形で



として考えると、

$i_{out}'=0$ のとき $i_{in}'=\dfrac{v_{in}'}{Z_{in}}+j\omega C_{gd}(v_{in}'-v_{out}')$　$A_V'=\dfrac{v_{out}'}{v_{in}'}$ とすれば

$$\frac{i_{in}'}{v_{in}'}=\frac{1}{Z_{in}}+j\omega C_{gd}(1-A_V')$$

$$i_{out}'(=0)=\left(v_{out}'-A_V v_{in}'\right)\frac{1}{Z_{out}}+j\omega C_{gd}(v_{out}'-v_{in}')$$

$$\left(\frac{A_V}{Z_{out}}+j\omega C_{gd}\right)v_{in}'=\left(\frac{1}{Z_{out}}+j\omega C_{gd}\right)v_{out}'$$ なので、

$$A_V'=\frac{v_{out}'}{v_{in}'}=\frac{\dfrac{A_V}{Z_{out}}+j\omega C_{gd}}{\dfrac{1}{Z_{out}}+j\omega C_{gd}}=A_V\frac{1+\dfrac{j\omega C_{gd}Z_{out}}{A_V}}{1+j\omega C_{gd}Z_{out}}$$

従って $\omega C_{gd}Z_{out}<<1$ では、$A_V'=A_V$ である。一方、

入力インピーダンスには、$C_{gd}(1-A_V)$ となるコンデンサが並列に入る形になる。

$A_V=-100$ とすれば、入力側に入る容量は約 100 倍になっている。

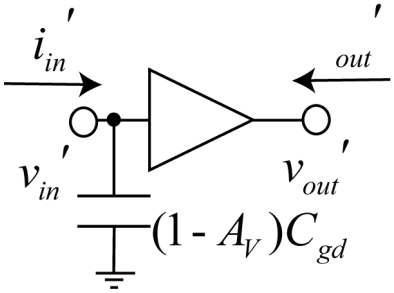
この様に入力と出力側につながった容量が、ゲイン倍されて入力側から見えるのをミラー効果と呼ぶ。

ここでもっと理想的な増幅器として、$A=\dfrac{v_{out}}{v_{in}}$，$Z_{in}=\infty$（すなわち $i_{in}=0$）で $Z_{out}=0$（$v_{out}=Av_{in}$ となるということ）を考え、これをオペアンプと呼ぼう。普通 A は負の非常に大きな値を取る。いま $A=-100$ となったら、（短絡以外の）何が負荷になろうと $v_{out}=Av_{in}=-100v_{in}$ となるということである。

（実際には理想オペアンプは電圧増幅率は無限大であり、かつ 2 入力でその差の v_{in} がゼロになるように考える。後でやる。）

$Z_{in}=\infty$　なので $\dfrac{i_{in}'}{v_{in}'}=\dfrac{1}{Z_{in}}+j\omega C_{gd}(1-A_V')=j\omega C_{gd}(1-A_V')$ となる。

$Z_{out}=0$ なので $A_V{}' = A_V \dfrac{1+\dfrac{j\omega C_{gd}Z_{out}}{A_V}}{1+j\omega C_{gd}Z_{out}} = A_V$ となる。



ここで注意したいのは、上の形では帰還が無いように見えるが、コンデンサは帰還をかけているので、ミラーの定理は、場合に依って巧く使えない事である。具体的には、今回の場合は入力インピーダンスや電圧増幅率を求めるには有効だが、出力インピーダンスを求めるには有効ではない。

<u>バラツキ</u>

いまの集積回路にはものすごい数のトランジスタが入っている（Core i7 では 10 億個を超え、米 NVIDIA の GPU は 30 億個を超えている。）2.5cm 角で 30 億個とすると、一個あたりのトランジスタの大きさは 20 平方ミクロンくらいだ。髪の毛の太さは 100 ミクロンなのに。

今論理回路で使われるゲート長は 40nm 程度。W/L=10 で幅 W は 400nm 位となる。

さて、電流は $I_{DS}=\dfrac{1}{2}\mu C_{OX}\dfrac{W}{L}(V_{GS}-V_{th})^2$ であり， $C_{gs}=\dfrac{2}{3}C_{OX}LW$ （2/3 は飽和動作時チャネル内の電子が一様でないことを計算して出てくる。電子デバイスでやるはず)、

$g_m=\mu\dfrac{W}{L}C_{OX}(V_{GS}-V_{th})$ $\dfrac{W}{L}$ を一定にしたまま L を減らせば C_{gs} を減らせる（MOSFET のスケーリングの概念。小さくするほど高性能：ムーアの法則を支えてきた）

でも、小さくするとバラツキの影響が大きくなる。

同じバラツキでも小さな素子では大きく効くが、大きな素子では効かない。一般的に $\sigma=\dfrac{A}{\sqrt{WL}}$ となる。ここで σ はしきい値などのバラツキ、A はプロセスで決まるパラメータである。世代が進んで技術が進むと、A は小さくなっていくが、サイズも小さくなるので、バラツキはいつもある。

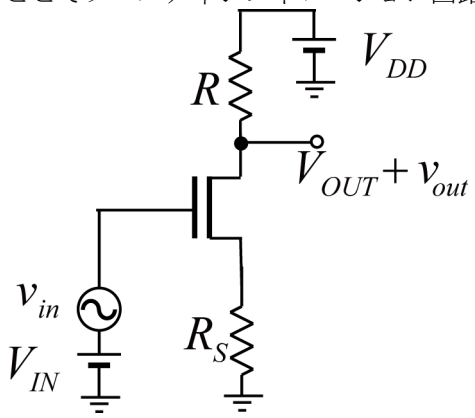
電流のバラツキを変分で表すと、$\Delta I_{DS}=\dfrac{\partial I_{DS}}{\partial\mu}\Delta\mu+\dfrac{\partial I_{DS}}{\partial C_{OX}}\Delta C_{OX}+\dfrac{\partial I_{DS}}{\partial W}\Delta W+\dfrac{\partial I_{DS}}{\partial L}\Delta L+\dfrac{\partial I_{DS}}{\partial V_{th}}\Delta V_{th}$

$$\frac{\Delta I_{DS}}{I_{DS}} = \frac{\Delta\mu}{\mu} + \frac{\Delta C_{OX}}{C_{OX}} + \frac{\Delta W}{W} - \frac{\Delta L}{L} - \frac{2\Delta V_{th}}{V_{eff}}$$

それぞれは、独立に変化する成分と相関をもって変化する成分がある。
例えばしきい値は、C_{OX}, L と相関を持っている。
L は、他にも効く基本パラメータなので、σは3%程度に厳しく制限されている。
（普通は3σで10%が目安）
しきい値は他の要因も効くことから、絶対値でプラスマイナス100mV程度変動するときもある。
（サイズが小さくなるとしきい値も下がる傾向にあるのでやっかいである。）
ただし、隣接するデバイス同士のバラツキが、実は重要で、その場合はバラツキ量は数分の1に落ちる。

回路特性のバラツキを減らすには、
1. トランジスタサイズを大きくする。→　もったいない。やりたくない。
2. 回路を工夫する。（ソースディジェネレーション・差動化）

ここでソースディジェネレーション回路の例を示そう。



ここで、$V_S = R_S I_{DS}$, $\Delta I_{DS} = -g_m \Delta V_{th} - g_m \Delta V_S$ より、$\Delta V_S = R_S \Delta I_{DS} = -g_m R_S (\Delta V_{th} + \Delta V_S)$
$\Delta V_S = \frac{-g_m R_S \Delta V_{th}}{1 + g_m R_S}$ となる。$g_m = \mu C_{OX} \frac{W}{L}(V_{IN} - V_S - V_{th})$ であり、

$$g_m{}' = \mu C_{OX} \frac{W}{L}(V_{IN} - V_S - V_{th} - (\Delta V_S + \Delta V_{th}))$$
$$= g_m(1 - \frac{1}{V_{eff}}(\Delta V_{th} - \frac{g_m R_S \Delta V_{th}}{1 + g_m R_S})) = g_m(1 - \frac{\Delta V_{th}}{V_{eff}}(\frac{1}{1 + g_m R_S}))$$

となることから、ΔV_{th} の影響は $\frac{1}{1 + g_m R_S}$ になっている。ただし、利得も $A_V = \frac{g_m R}{1 + g_m R_S}$ と損するので、余りこの目的には使われない。

$\frac{\Delta I_{DS}}{I_{DS}} \simeq -\frac{2\Delta V_{th}}{V_{eff}}$ なので、V_{eff} が小さいほど電流バラツキは大きくなる。$g_m = \frac{2I_{DS}}{V_{eff}}$ より、V_{eff} が小さく（$\frac{W}{L}$ を大きくする）したほうが I_{DS} あたりの g_m は大きくできるが、バラツキも大きくなるので注意が必要である。