

幾何学概論第二 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解できるように書いてください。
- 計算や下書きには余白・裏面を使用してください（採点の対象ではない）。
- 試験終了後は、解答用紙、持込用紙を回収します。問題は持ち帰っていただいて結構です。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。

指定用紙のみ持込可

問題 A [100 点] 次の文中の [1] ~ [32] に最もよく充てはまる数・式を入れなさい¹。

座標平面 $\mathbb{R}^2$ 上の領域 $D_0 := \{(u, v) \mid |u| < \pi\}$ 上で定義された写像

$$p: D_0 \ni (u, v) \longmapsto p(u, v) = (\operatorname{sech} v \cos u, \operatorname{sech} v \sin u, v - \tanh v) \in \mathbb{R}^3$$

は D_0 から $\mathbb{R}^3$ への C^∞ -級の単射を与える。このとき、 p が曲面の正則なパラメータ表示を与える D_0 の部分領域 D で、点 $(0, 1)$ を含む最大のものは $D = \{(u, v) \in D_0 \mid [1]\}$ である。

以下、 p は領域 D 上で定義されているものとする。

このとき p の第一基本形式は $ds^2 = [2]$ とかける。とくに、 $\varepsilon \in (0, \pi)$, $\delta \in (0, 1)$, $M \in (1, \infty)$ に対して

$$\overline{D}_{\varepsilon, \delta, M} := \{(u, v) \in D; |u| \leq \pi - \varepsilon, \delta < v < M\}$$

とおき、 $S_{\varepsilon, \delta, M}$ を $\overline{D}_{\varepsilon, \delta, M}$ に対応する曲面上の部分の面積とすると、その極限値は

$$S_{\varepsilon, \delta, M} \rightarrow [3] \quad (\varepsilon \rightarrow +0, \delta \rightarrow +0, M \rightarrow +\infty)$$

となる。

いま、定数 $a > 1$, $c > 0$ に対して、座標平面 D 上の曲線

$$(*) \quad C_1 := \{(u, v) \in D \mid u^2 + \cosh^2 v = a^2\}, \quad C_2 := \{(u, v) \in D \mid (u - c)^2 + \cosh^2 v = a^2 + c^2\}$$

を考えると、これらはともに (u, v) 平面上の点 $(u_0, v_0) := (0, [4])$ を通る。この点の p による像を $P := p(u_0, v_0)$ 、 C_1 , C_2 に対応する曲面上の曲線を $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ とすると、2 つの曲線 $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ が点 P でなす角は [5] である。

ここで $\nu = [6]$ とおくと、 ν は p の単位法線ベクトル場を与える。これを用いると p の第二基本形式は $II = [7]$ と表される。とくに p の主曲率は [8]、ガウス曲率 K は [9]、平均曲率 H は [10] となる。

裏面に続く

¹ 空欄に入れる式は、一般的な定義式ではなく、 (u, v) , a などの具体的な式である。

領域 D 上の各点 (u, v) で $\{p_u(u, v), p_v(u, v), \nu(u, v)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底を与えるので, $p_{uu}, p_{uv}, p_{vv}, \nu_u, \nu_v$ は p_u, p_v, ν の線型結合で表される. 実際, これらは (u, v) の具体的な関数 11–25 を用いて

$$\begin{aligned} p_{uu} &= \text{11} p_u + \text{12} p_v + \text{13} \nu, \\ p_{uv} &= \text{14} p_u + \text{15} p_v + \text{16} \nu, \\ p_{vv} &= \text{17} p_u + \text{18} p_v + \text{19} \nu, \\ \nu_u &= \text{20} p_u + \text{21} p_v + \text{22} \nu, \\ \nu_v &= \text{23} p_u + \text{24} p_v + \text{25} \nu \end{aligned}$$

と表される.

ここで $(u(t), v(t))$ を D 上の正則曲線のパラメータ表示, $\hat{\gamma}(t) := p(u(t), v(t))$ とすると, その加速度ベクトルは $\dot{u}, \dot{v}, \ddot{u}, \ddot{v}$ と (u, v) の関数を用いて

$$\ddot{\gamma} = \text{26} p_u + \text{27} p_v + \text{28} \nu$$

と表すことができる.

とくに $(u(t), v(t))$ が $(*)$ 式で定義された曲線 C_1 のパラメータ表示で $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ となるもの, $\hat{\gamma}(t) := p(u(t), v(t))$ とすると, $t = 0$ における $\hat{\gamma}(t)$ の法曲率は 29, 測地的曲率の絶対値は 30² となる.

正の定数 b に対して

$$u := \xi - b\eta, \quad v = \xi + b\eta$$

とすると (ξ, η) は曲面 $p(u, v)$ の新しいパラメータを与える. とくに, (ξ, η) がこの曲面の漸近線座標系となるのは $b = \text{31}$ のときで, このとき, 第一基本形式は ds^2 と第二基本形式 II は

$$ds^2 = d\xi^2 + 2 \cos \theta d\xi d\eta + d\eta^2, \quad II = 2 \sin \theta d\xi d\eta$$

という形にかける. ただし θ は (ξ, η) の具体的な式で $\theta = \text{32}$ と書ける.

問題 B 「地球の正確な地図を描くことはできない」ということの理由を「ガウス曲率」という言葉を用いて説明しなさい. [10 点]

問題 C [0 点] 何か言い残すことがありましたら書きください. 何を書いても怒りません.

おつかれさまでした ♡

²測地的曲率の絶対値は, 弧長パラメータで表された曲面上の曲線の加速度ベクトルの接成分の大きさ.

問題 A の解答欄 各 5 点; 11-13, 14-16, 17-19, 20-22, 23-25, 26-28 は各組 5 点

1 $v > 0$	2 $\operatorname{sech}^2 v \, du^2 + \tanh^2 v \, dv^2$		3 2π
4 $\cosh^{-1} a = \log(a + \sqrt{a^2 - 1})$		5 $\cos^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$	
6 $(-\operatorname{sech} v \cos u, -\operatorname{sech} v \sin u, \tanh v)$		7 $-\operatorname{sech} v \tanh v (du^2 - dv^2)$	
8 $-\sinh v, \operatorname{cosech} v$		9 -1	10 $\frac{1}{2}(\operatorname{cosech} v - \sinh v)$
11 0	12 $\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$		13 $-\operatorname{sech} v \tanh v$
14 $-\tanh v$	15 0		16 0
17 0	18 $\operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v$		19 $\operatorname{sech} v \tanh v$
20 $\sinh v$	21 0		22 0
23 0	24 $-\operatorname{cosech} v$		25 0

[illegible]

幾何学概論第二 定期試験〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄 (つづき) 1-3, 4-6, 7-10, 11-14, 15, 16, 17, 18, 19, a 各 5 点

26 $\ddot{u} - 2 \tanh v \dot{u} \dot{v}$			
27 $\ddot{v} + \operatorname{sech} v \operatorname{cosech} v (\dot{u}^2 + \dot{v}^2)$			
28 $-\operatorname{sech} v \tanh v (\dot{u}^2 - \dot{v}^2)$			
29 $\pm \sqrt{a^2 - 1}$	30 0	31 1	32 $4 \tan^{-1} e^{-\xi - \eta}$

計算スペース

学籍番号									氏名	
------	--	--	--	--	--	--	--	--	----	--

計算スペース

[illegible]

