

2019 年 12 月 12 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第二 (MTH.B212) 講義資料 2

前回の補足 二つの位相空間 X, Y が同相であるとは、連続な全単射 $f: X \rightarrow Y$ で、逆写像も連続となるものが存在すること。

前回までの訂正

- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-1 (1) の 4 行目: 弧 $\widehat{AB}$ と線分 BC が点 A で $\Rightarrow$ 弧 $\widehat{AB}$ と線分 BC が点 B で
- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-1 (1) の 5 行目: 角とするととき、これらの角の $\Rightarrow$ 角と**する**。これらの角の
- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-1 (3) の 3 行目: B と C を結ぶ子午線 $\Rightarrow B$ と N を結ぶ子午線
- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-2 (4): $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の関数
- 講義資料 1, 4 ページ, 問題 1-3 (2): (??) で与えられる行列値関数 $\Rightarrow$ **問題 (1)** で与えられる行列値関数

授業に関する御意見

- 星型の内角の和の求め方が面白かったです。塾でちょうど図形の単元を勉強している中学生に教えたら、とても喜んでもらいました。 山田のコメント: よかった。
- Gauss 曲率という局所的な量が位相不変量という大域的なものになるのが面白かった。 山田のコメント: Gauss 曲率が位相不変量になるのではなくガウス曲率の「曲面全体での総和」が位相不変量ですね。
- 空間曲線のとき、曲線上の進行方向は 2 方向に決まるのに対して、曲面上では無限個の方向に進むことができるようになるので、何を与えたら曲面が定まるのか興味深く思いました。 山田のコメント: 多変数を考えるときは「向き」に拘泥するとわからなくなりますが、多変数関数の極値問題を考えるときは「増減」という考えを捨て去る必要があります。
- パラメータ表示がうまくいかないというのは感覚的に意外だった。 山田のコメント: 「うまくいかない」は一般に (1) 標準的なパラメータが存在しない (2) 曲面全体を 1 つのパラメータ表示で表せない、の 2 点、というのは理解していますね (確認)
- $\mathrm{T}_E X$ の名前は technology に由来するというのを聞いて、「 $\mathrm{T}_E X$ の由来は芸術という意味のギリシャ語だった気がする」と思って調べてみたら、 $\mathrm{T}_E X$ の由来であるギリシャ語 $\tau \acute{\epsilon} \chi \nu \eta$ は技術、芸術両方の意味をもつことを知り面白いと思いました。 山田のコメント: 古代ギリシアでは芸術と技術が明確に分化していなかったのではないのでしょうか。
- 3Q の成績としての点数は、毎回あの式で算出しているのでしょうか。それとも私たちの試験の点に応じて式を作っているのでしょうか。 山田のコメント: 後者。
- 成績のつけ方がかなり甘くて驚きました。 山田のコメント: 私です。
- とくにありません。 山田のコメント: 私です。

質問と回答

質問 1: “曲面を陰関数表示したとき、陰関数表示の特異点をもたなければ、曲面をいくつかの正則パラメータ表示のかさねあわせで表せる”という命題は正しいのでしょうか。 お答え: 正しい。テキスト §6。

質問 2: 曲面の 2 変数パラメータ表示で表示が正則であることの定義で、偏微分のベクトルが一次独立でなければならないのはどうしてでしょうか。 お答え: そうであればなめらかな関数のグラフで書ける。

質問 3: 特異点のある曲面の表示はパラメータでできないのですか? お答え: いいえ、テキスト 68 ページ。

質問 4: 授業中に出てきた無限に長い円柱の場合について、三次元射影空間の中で考えて辻褄を合わせることはできるのでしょうか。 お答え: 無限の円柱は三次元射影空間内では特異点をもつので、そのままでは辻褄があいけません。

質問 5: 地図の記法 (メルカトル, 正距方位図法など) が異なるということはパラメータ表示が異なるということなのですか? お答え: そうです。テキスト付録 B-3。

質問 6: 山田先生は Gauss の名前のみを書くときは Gauß と書いて、Gauss-Bonnet の定理のときは Gauss と書いていましたが、それは慣習によるものですか? お答え: 複数の表記を見せたかった。同じ文脈では揃えるのが普通。

質問 7: 同相写像よりももっと強い微分同相写像がでてきた問題をやったのですが、位相幾何は同相写像でうつりあうもののうちの不変量のみをみるものでしたが、微分同相写像での不変量を追っていく幾何は何か名前はついていませんか? お答え: 微分位相幾何。

質問 8: 問題 1-1 (4) で $v(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ とすれば (*) をみたしますが、 $\tan^{-1}$ という関数を定義したからあるといえただけのような気がします。 $\tan^{-1}$ が定義されていなかったら存在しないことになってしまいそうな感じがよくわからなくなっていました。 お答え: y 軸上で $\tan^{-1} \frac{y}{x}$ が定義されない。

質問 9: 問題 1-3(2) で $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (u, v) \mapsto (|u|, |v|) \in \mathbb{R}^2$ が反例になっていると思いました。これは大域的には微分同相写像でないですが、局所的には微分同相写像であると思いました。

お答え: u 軸, v 軸上で微分可能性が崩れますので、局所的にも微分同相写像ではありません。

質問 10: 1-3 (2) の最後の「 $D' := \varphi(D)$ 」は「 $D' := \varphi(D)$ 」ではないのでしょうか (φ があって制限するという話なので)。 お答え: いいえ。像 $\varphi(D)$ を D' と書くことにする、という意味です。

質問 11: 曲面のパラメータ表示は、曲線のとき、曲率を定義するときに弧長パラメータを定義したように何かを定義するのでしょうか。 お答え: いいえ、講義で説明したように、そのような特別なパラメータ表示はありません。

質問 12: 曲面を考えると $\mathbb{R}^2$ 平面上を考えていると思うんですが、複素平面上で複素関数としての微分などは考えないのですか? $\mathbb{R}^2$ 平面で考えるメリットがあるのですか? お答え: 「 $\mathbb{R}^2$ 平面」っていうのは新しい用語ですね. $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と思って $\mathbb{C}$ 上で考える, という意味でしょうか. そういう場合もあります. テキスト §15 参照.

質問 13: コーシーリーマンの方程式は, 複素数に関連するとおっしゃっていましたが, どのように関わるのかよくわからなかったので, 教えてください. お答え: 講義で述べたのは, 複素数 $x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$) に複素数 $u(x, y) + iv(x, y)$ を対応させる関数が正則 (複素関数の意味で微分可能) であるための必要十分条件.

質問 14: 曲線同士の角度とは何ですか? $/2$ つの曲線がつくる角度は曲線と曲線の交わる点における 2 曲線の接線がつくる角度ですか. お答え: はい.

質問 15: ルーローの三角形の内角の和は π であってますか. お答え: 合ってません. 一つの内角は 120° のはず.

質問 16: 2 つの曲線が交点をもつとき, その点での角度を線 (原文ママ, 接線のことか) のなす角度で定義していると解釈している. この定義を $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), $y = 0$ のような微分可能だが C^1 -級でない曲線に対しても適用するのは (先生目線からみて) 自然ですか? お答え: 何を調べたいかによるのでは?

質問 17: なぜ $\sec$ に対応するのは $\frac{1}{\sin x}$ でなく $\frac{1}{\cos x}$ になっているのでしょうか? お答え: 残念ながら知りません.

質問 18: 「球面上で 2 点を結ぶ最短の曲線は大円である」のような表現に違和感がありました. («大円に含まれる» などならよいのですが) この言葉使いは単に細かいことを気にしていないだけなのでしょう. お答え: はい, 気にしていないだけです. «平面上の 2 点を結ぶ最短線が直線」という (正しくは線分) のと同様の慣用表現.

質問 19: 多角形や星型などはなめらかでないのに, 角度の和を求めるときに曲率で考えてうまくいったのはどうしてですか? お答え: 曲率では考えていません. 全曲率との「類似」を考えています.

質問 20: Gauss-Bonnet の定理において, 曲面 S 上の測地線で囲まれた n 角形について, 三角形の類 (山田注: 多分原文ママ. 類似のことか. ただし原文の字が判読し難いため断定できない) として, 各頂点の内角を $\angle A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) としたとき, Gauss 曲率が定まり, $\sum_{i=1}^n \angle A_i = (n-2)\pi + \iint_{\text{多角形}} K dA$ となるのでしょうか. お答え: はい, 多角形の囲む領域が円板と同相ならそうなります.

質問 21: 中学で習う「多面体のオイラー数はすべて 2」のオイラー数が閉曲面に拡張されるのが面白かったです. このオイラー数は正, 0, 負, どれにもなりうるのでしょうか. またなるとしたらオイラー数の符号が同じである図形に共通する特徴というものはあるのでしょうか. お答え: テキスト §10.

質問 22: オイラー数 $\chi(S) = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$ オイラーの多面体定理 (頂点の数) - (辺の数) + (面の数) = 2 とどんな関係にあるのか. お答え: 球面のオイラー数は 2, 多面体は球面と同相.

質問 23: S の Euler 数で一般の曲面に対して面や頂点, 辺を定義していましたが, その上でオイラーの多面体定理のような関係式は成立するのでしょうか. お答え: 球面と同相な閉曲面のオイラー数は 2.

質問 24: 球面は $\mathbb{R}^2$ のどの領域とも同相でないというお話がありましたが, この事実はまだ自分にとって当たり前ではありませんでした. 極座標表示 $(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ r 定数, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ で考えれば, θ, π の領域と対応がつくと思ったのですが, 北極点などで単射にならないことなどが影響しているのでしょうか. ($(0, 0, r)$ を与える (θ, φ) は $\theta = 0$, φ は任意など). お答え: そのとおり. この資料の「同相」の定義参照.

質問 25: 授業中に $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の球面が同相でないことを, 同相写像ではコンパクト性を保つことから述べていましたが, コンパクトではない $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ ($n \neq m$) のような 2 つについて, 同相でないことはどのようにして示されますか? ($n = 1$ においては 1 点を抜いた連結性の変化から示されるのを見たことがあります).

お答え: これは難しい問題. $\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ が $m \neq n$ のときに「微分同相でない」のは, 微分同相ならヤコビ行列が可逆であることから示せますが「同相でない」ことは非自明で, 「領域の不変性」invariance of domain からの帰結です.

質問 26: $\mathbb{R}^3$ 内における曲面 S が $\sigma: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ で正則なパラメータ表示されているとします. S の任意の異なる 2 点 $\sigma(s_0, t_0)$, $\sigma(s_1, t_1)$ を結ぶ S 上の最短経路すなわち測地線が満たすべき条件を求めようと思ったのですが, まず, 測地線は常に S 上の正則な空間曲線となるのでしょうか. また, 測地線が存在しないことはありますか. 次にこれが成り立つのであれば, D 上の 2 点 (s_0, t_0) , (s_1, t_1) を結ぶ経路 C を $\gamma: \mathbb{R} \supset D \rightarrow D'' \subset \mathbb{R}^2$ でパラメータ表示し, 空間曲線 $\sigma \circ \gamma$ について, ($D = [u_0, u_1]$ とするとき) すべての条件を求めることによって, S の 2 点の測地線についての条件を考えることができるのでしょうか. お答え: テキスト §10 を見よ. 曲面上の任意の 2 点をむすぶ測地線は存在しないこともある. 「完備性」という言葉で調べてみよう.

質問 27: 講義中に閉曲面の例としてドーナツ型のものを挙げられていましたが, 左図 (山田注: ドーナツの絵, 省略) のような図形を考えたとき, その面積は閉曲面の面積」と一致するのでしょうか. 言葉で上手く説明できません. すみません. お答え: 「その面積」と「閉曲面の面積」が異なるものと読み取れませんでした. すみません.

質問 28: この紙をコピーして使う場合の向きの指定は 3Q と同じですか. お答え: はい.

2 曲面のパラメータ表示; 面積・長さと第一基本量

■ 曲面の表示

- なめらかな 2 変数関数のグラフ $z = f(x, y)$.
 - 陰関数 $F(x, y, z) = 0$; 特異点: $\text{grad } F = (F_x, F_y, F_z) = \mathbf{0}$ となる点.
 - パラメータ表示 $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$; 特異点: p_u と p_v が 1 次従属となる点.
- 曲面の正則なパラメータ表示 (正則曲面) とは, 各 (u, v) で $p_u(u, v), p_v(u, v)$ が 1 次独立となること.

- 問 2.1. • なめらかな 3 変数関数 $F(x, y, z)$ に対して, $S := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ を考える. $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$ において $F_z(P) \neq 0$ ならば, P の近傍 $U \subset \mathbb{R}^3$ と (x_0, y_0) の近傍 $D \subset \mathbb{R}^2$ およびなめらかな 2 変数関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $S \cap U = \{z = f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$ となることを示しなさい. このことを「 S は P の近傍でなめらかな関数のグラフで表される」という.
- $\mathbb{R}^2$ の領域 U で定義されたなめらかな写像 $p: U \ni (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ を考える. 点 (u_0, v_0) で $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$ が一次独立であるとき,
 - (u_0, v_0) において $(\det \begin{pmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}) \neq (0, 0, 0)$ であることを示しなさい.
 - 上の問のベクトルの第 3 成分が 0 でないとき, (u_0, v_0) の近傍 $V \subset U$, $\mathbb{R}^2$ の開集合 D となめらかな関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $[1] p|_V$ は単射, $[2] p(V) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ となる.

■ パラメータ変換

定義 2.2. $\mathbb{R}^2$ の領域 D から $\mathbb{R}^2$ の領域 U への写像

$$(2.1) \quad \varphi: D \ni (\xi, \eta) \mapsto (u, v) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in U$$

が微分同相写像 diffeomorphism であるとは, $[1] \varphi$ は全単射. $[2] \varphi$ と φ^{-1} はともに C^∞ -級となること.

問 2.3. • 式 (2.1) の φ が微分同相写像ならば, D の各点で次が成立することを示しなさい:

$$(2.2) \quad J := \det \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix} \neq 0. \quad (J \text{ を } \varphi \text{ のヤコビ行列式 (Jacobian) という.})$$

- 式 (2.1) の φ で, 全射かつ D の各点で (2.2) を満たし, 単射でないものの例を一つあげなさい.
- 式 (2.1) の φ で全単射, C^∞ -級かつ φ^{-1} が C^∞ -級でない例を一つあげなさい.

問 2.4. 正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ と, (2.1) の形の微分同相写像 φ に対して $\tilde{p}(\xi, \eta) := p(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ とおくと, $\tilde{p}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ は正則な曲面のパラメータ表示を与えることを示しなさい. この $\tilde{p}$ を「 p からパラメータ変換 φ で得られる」という. 誤解の恐れがないときは, $\tilde{p}(\xi, \eta)$ を $p(\xi, \eta)$ と書くことがある.

■長さ 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上でパラメータ表示された正則曲面 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ において, 平面上の領域 U は曲面を表す「地図」と考える. 領域 U 上の曲線 $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ に対して $\hat{\gamma}(t) := p \circ \gamma(t) = p(u(t), v(t))$ は地図上の道に対応する実際の曲面上の道を与える. この状況の下, チェイン・ルールから

$$\frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t) = \frac{\partial p}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial p}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t)$$

となるので, t の動く区間 $[a, b]$ に対応する曲線 $\hat{\gamma}$ の長さは

$$(2.3) \quad L(\hat{\gamma}) = \int_a^b \left| \frac{d\hat{\gamma}}{dt}(t) \right| dt = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

で与えられる. ただし

$$(2.4) \quad E := p_u \cdot p_u, \quad F := p_u \cdot p_v, \quad G := p_v \cdot p_v \quad \left(p_u := \frac{\partial p}{\partial u}, \quad p_v := \frac{\partial p}{\partial v} \right)$$

である. これらの (u, v) の関数 $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ を曲面 $p(u, v)$ の第一基本量という.

■面積 正則な曲面 S のパラメータ表示 $p: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($U \subset \mathbb{R}^2$ は領域) に対して, 有界閉集合 $\bar{V} \subset U$ をとるとき曲面の $\bar{V}$ に対応する部分の面積は, 次で与えられる:

$$A(\bar{V}) := \iint_{\bar{V}} |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| du dv.$$

問 2.5. 曲面の面積はパラメータのとりかたによらないことをきちんと述べて示しなさい.

問題

2-1 $\mathbb{R}^2$ の領域 $D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < u < \pi, v > 0\}$ 上で定義された写像 $p(u, v) = (\cos u \operatorname{sech} v, \sin u \operatorname{sech} v, v - \tanh v)$ に対して

- (1) 領域 D 上で p は正則曲面のパラメータ表示を与えていることを示しなさい.
- (2) p の第一基本量を求めなさい.
- (3) uv 平面上の曲線 $\gamma(t) = (0, t)$ ($\delta \leq t \leq M$) に対応する曲面 p 上の曲線の長さを求めなさい. ただし δ, M は $\delta < M$ を満たす正の数である. $\delta \rightarrow +0, M \rightarrow +\infty$ のときどうなるか.
- (4) 有界閉領域 $\bar{D}' = [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \times [\delta, M]$ に対応する曲面の部分の面積を求めなさい. ただし ε, δ は十分小さい正の数, M は十分大きい正の数である. $\varepsilon, \delta \rightarrow +0, M \rightarrow +\infty$ のときどうなるか.

2-2 (この問題は, 計算機をつかって近似値を答えなさい) 地球を xyz -空間の原点を中心とする半径 R km の球面とみなし, z 座標が正の部分に北半球, $y = 0, x > 0$ の部分を標準子午線, 赤道を $(R \cos t, R \sin t, 0)$ とパラメータ表示したときの t が経度を表すものとする. 地球上の 2 点 A (北緯 35.61 度, 東経 138.68 度), B (北緯 48.86 度, 東経 2.29 度) を考える.

- (1) A, B を結ぶ地球上の大円の弧のうち短い方の長さを ρ_1 km とするとき, ρ_1/R を求めなさい.
- (2) 地球のパラメータ表示

$$p(u, v) := (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v) \quad \left(-\pi < u \leq \pi, -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

で点 A, B に対応する uv -平面上の点 A', B' を結ぶ uv -平面上の線分を p で写した球面上の曲線の長さを ρ_2 とするとき, ρ_2/R を求めなさい.

- (3) 地球のパラメータ表示

$$q(\xi, \eta) := \left(R \frac{\cos \xi}{\cosh \eta}, R \frac{\sin \xi}{\cosh \eta}, R \tanh \eta \right) \quad (-\pi < \xi \leq \pi, \eta \in \mathbb{R})$$

で点 A, B に対応する $\xi\eta$ -平面上の点 A'', B'' を結ぶ $\xi\eta$ -平面上の線分を q で写した球面上の曲線の長さを ρ_3 とするとき, ρ_3/R を求めなさい.