

2019 年 10 月 31 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論第一 (MTH.B211) 講義資料 5

お知らせ

-

前回までの訂正

-

授業に関する御意見

- 山田のコメント :

質問と回答

質問 1 :

お答え :

5 空間曲線

■準備：外積

- 基底の正負 (教科書 204 ページ)
- 外積 (教科書 207 ページ)

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線 (教科書 51 ページ)
- 単位接ベクトル e , 主法線ベクトル n , 従法線ベクトル b , 曲率 κ , 捩率 τ (教科書 51–52 ページ)
- フルネ・セレの公式 (教科書 54 ページ)

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

問題

5-1 曲率が一定な球面曲線は円である.

5-2 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき, 曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

を満たすことを示しなさい.

5-3 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における単位接ベクトル $e(s_0)$, 主法線ベクトル $n(s_0)$, 従法線ベクトル $b(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き, $\gamma(s_0) = 0$ となるような座標系をとる. このとき, $s = s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面, yz 平面, zx 平面への正射影はどのような形になるか, 図示しなさい. ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする.

5-4 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率, 捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする.

- ある一定な単位ベクトル v で $\gamma'(s)$ と v のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい.

- この v に対して, $\gamma(s)$ の, v の直交補空間への正射影 $\gamma^* = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot v)v$ はどんな曲線か.

5-5 原点を中心とする半径 1 の球面上の曲線 $\sigma(t)$ ($|\sigma| = 1$) が $\det(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) \neq 0$ を満たしているとする. このとき,

$$(*) \quad \gamma(t) := \int^t (\sigma(u) \times \dot{\sigma}(u)) du$$

とおくと, γ は 0 でない曲率をもち, 捩率が 1 となる曲線となる. 逆に, 曲率が 0 にならず, 捩率が 1 となるような曲線 γ に対して, ある球面上の曲線 σ で (*) を満たすものが存在する. (ヒント: $e = n \times b$)