数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第12回　評価関数の粗代替性

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

財集合の評価関数

- 財の評価

複数需要モデル

入札者は財の集合を評価

→ 財の集合 X に対して評価値 $v_i(X)$

集合 X に関する関数（評価関数, valuation function）

一般的な仮定

- 空集合の評価値 $v_i(\emptyset)$ は 0
- v_i は単調非減少: $X \subseteq Y$ ならば $v_i(X) \leqq v_i(Y)$

ワルラス均衡

- 定義：需要集合$D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義：価格ベクトルp^*と財の配分$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$の組はワルラス均衡

  ⇔ $X_i \in D_i(p^*)\ (i = 1, \ldots, m), \quad p(j) = 0\ (\forall j \in X_0)$

価格p^*の下で皆が最良の財集合

例：$p = (60,60,60,60,60)$のとき
- Aさん：$D_A(p) = \{\ \{1\}\ \}$
- Bさん：$D_B(p) = \{\ \{2,5\}\ \}$
- Cさん：$D_C(p) = \{$財の数2または3$\}$

➔ p と配分 $\{\emptyset, \{1\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$ はワルラス均衡

代替性と補完性

- 2つの財の関係
  - 代替的: 2つの財が類似，一方を他方で置き換え可能
    どちらかがあれば嬉しい
    両方あっても，あまり嬉しくない
    - 具体例: 紅茶とコーヒー，2種類のいす，レタスとキャベツ
  - 補完的: 2つの財の性能・能力が補完的
    両方あれば嬉しい，片方だけでは不十分
    - 具体例: 食卓と椅子，プリンタとインク，ゲーム機とソフト
- 財の集合が代替的（補完的）
  ←→集合内の任意の2つの財が代替的（補完的）

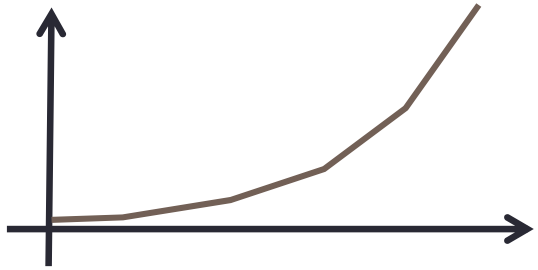
この講義: 代替的な財（代替財）を主に扱う

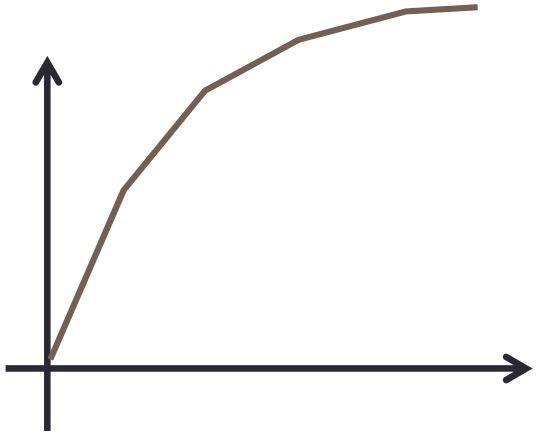
代替財に対応する評価関数の例

ポイント: 財集合の評価値≦個々の評価値の和

- 重み和（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）(additive)
- 財集合（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）の中の
  一番良い財にのみ依存 (unit-demand)
  {①, ②, ③}➔評価値70, {③, ④, ⑤}➔評価値100
- 財の数に依存，かつ上に凸 (symmetric & concave)
  （1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300）

※ symmetric & convex ならば補完的





より一般的な評価関数：粗代替的評価関数

粗代替性≒ある財が値上がりしたら，他の財の欲しさが高まる

定義： 評価関数 v_i: $2^N \to \mathbb{Z}_+$は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]

←→

価格 50 70 90 30 80

最も欲しい財集合

ある財の価格が増加

価格 50 70 90 30 95

最も欲しい財集合

価格不変の財は引き続き欲しい

より一般的な評価関数：粗代替的評価関数

粗代替性≒ある財が値上がりしたら，他の財の欲しさが高まる

定義： 評価関数 v_i: $2^N \to \mathbb{Z}_+$は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす[Kelso-Crawford(1982)]

$\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$,

$\forall X \in D_i(p)$, $\exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$$D_i(p) = \arg\max\{v_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$$

定理[Kelso-Crawford(1982)]：
各入札者の評価関数が粗代替性を満たす ➔ ワルラス均衡が存在

粗代替性を満たす評価関数の例

- 重み和（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）(additive)

$p = (40,80,10,60,100)$ のとき $D_i(p) = \{\{1,3\},\{1,3,5\}\}$
➔ $q = (60,80,10,60,100)$ のとき $D_i(q) = \{\{3\},\{3,5\}\}$
よって，X={1,3} → Y={3} を選べば条件を満たす
X={1,3,5} → Y={3,5}

- 財集合（①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100）の中の一番良い財にのみ依存 (unit-demand)

$p = (40,80,10,0,100)$ のとき $D_i(p) = \{\{3\},\{4\},\{3,4\}\}$
➔ $q = (40,80,40,0,100)$ のとき $D_i(q) = \{\{4\}\}$
よって，X={3} → Y={4} を選べば条件を満たす
X={3,4} → Y={4}

粗代替性と等価な性質：単改良性

定義：　単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

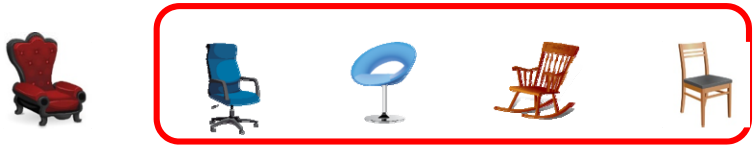
利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能

価格　50　70　90　30　80

最も欲しい
財集合ではない

高々1つの財の入れ替えで
利得が増加

財を1つ削除



財を1つ追加

財を1つ交換

粗代替性と等価な性質：単改良性

利得が最大でない➔財1個の削除，追加，または交換により
利得を増やすことが可能

定義：　単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N$, $\forall X \subseteq N$, if $X \notin D_i(p)$

➔ $\exists Y \subseteq N$ such that $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j > v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$

& 以下の (i) or (ii) or (iii) 成立

(i) $\exists j \in X: Y = X \setminus \{j\}$, (ii) $\exists h \in N \setminus X: Y = X \cup \{h\}$,

(iii) $\exists j \in X, \exists h \in N \setminus X: Y = X \setminus \{j\} \cup \{h\}$

定理[Gul-Stacchetti(1999)]：
評価関数 v_i は粗代替性を満たす←➔単改良性を満たす

利得最大であるための必要十分条件

- 「粗代替性←→単改良性」より,
  利得最大である財集合の特徴付けが得られる
- ある集合 X が利得最大であることを確認する方法
  - 素朴なやり方: すべての財集合と比較 → 2^n 回
  - 下記の命題を使ったやり方:X を少しだけ修正した集合の利得と比較すれば十分 → $2n + n^2$ 回 << 2^n

命題: 評価関数は粗代替性を満たすと仮定.

財の集合 $X \subseteq N$ に対し,

$X \in D_i(p)$ ←→ 以下のタイプの集合 Y に対し,

不等式 $v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p_j \leq v_i(X) - \sum_{j \in X} p_j$ が成立.

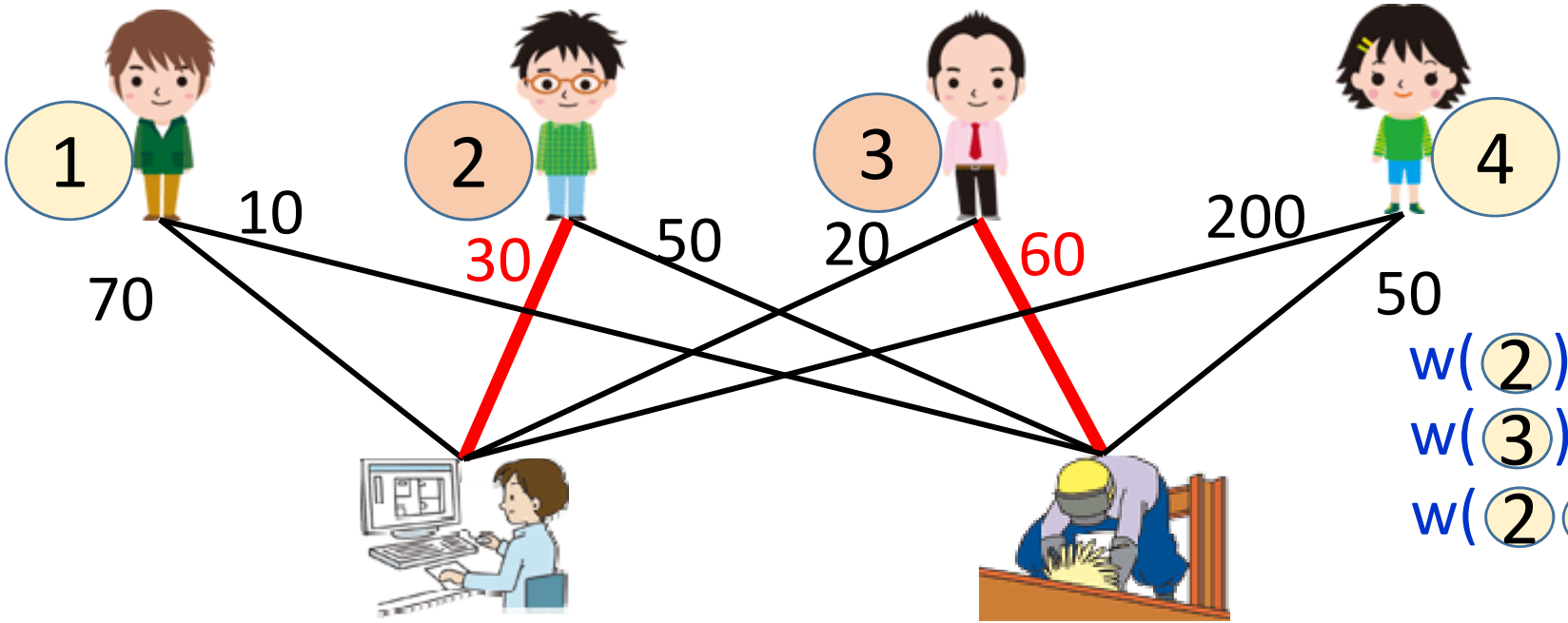
(i) $\exists j \in X: Y = X \setminus \{j\}$

(ii) $\exists h \in N \setminus X: Y = X \cup \{h\}$,

(iii) $\exists j \in X, \exists h \in N \setminus X: Y = X \setminus \{j\} \cup \{h\}$

割当評価関数

{}	0	{1,4}	210	{2,3,4}	260
{1}	70	{2,3}	90	{1,2,3,4}	260
{2}	50	{2,4}	250		
{3}	60	{3,4}	260		
{4}	200	{1,2,3}	130		
{1,2}	120	{1,2,4}	250		
{1,3}	130	{1,3,4}	260		



w(2)=50
w(3)=60
w(2 3)=30+60=90

利得最大のチェック

{}	0	0	{1,4}	210	0	{2,3,4}	260	60
{1}	70	40	{2,3}	90	70	{1,2,3,4}	260	30
{2}	50	50	{2,4}	250	70			
{3}	60	40	{3,4}	260	60			
{4}	200	20	{1,2,3}	130	80			
{1,2}	120	90	{1,2,4}	250	40			
{1,3}	130	80	{1,3,4}	260	30			

価格=(30, 0, 20, 180) のとき
X={1,2,3} は利得最大ではない（∵ {1,2} = X – {3} の利得 90）
X={3,4}は利得最大ではない（∵{2,4} = X – {3} + {2} の利得 70）
X={1,2}は利得最大である

利得最大の財集合を求めるアルゴリズム

- 貪欲アルゴリズムによって計算可能.
- 以下では，利得を $f(Y) = v(Y) - \sum_{i \in Y} p(i)$ と表す.

Step 0: $X_0 := \emptyset$, k:=1 とおく.

Step 1: k = n ならば終了.

Step 2: $f(X_{k-1} \cup \{i\})$ を最大にする $i_k \in N - X_{k-1}$ を求める.

Step 3: $X_k := X_{k-1} \cup \{i_k\}$ と更新して，Step 1 へ.

定理:

(i) k 回目の反復で得られた財集合 X_k は，
　要素数 k 個の条件の下で利得最大の財集合である.

(ii) k=1,2,...,n-1 に対し，$2f(X_k) \geqq f(X_{k-1}) + f(X_{k+1})$

(iii) $f(X_{k+1}) \leqq f(X_k) \geqq f(X_{k-1})$ ならば，X_k は f を最大にする集合

アルゴリズムの正当性: f のM♮凹性

- 評価関数は粗代替性を満たす ➔ M♮凹関数

➔ 利得の関数 f もM♮凹関数

$$\because\ v(X) + v(Y) \leq v(X - u + v) + v(Y + u - v)$$

$$\sum_{i \in X} p(i) + \sum_{i \in Y} p(i) = \sum_{i \in X-u+v} p(i) + \sum_{i \in Y+u-v} p(i)$$

$$\therefore\ f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$$

アルゴリズムの正当性: (i) の証明

(i) k 回目の反復で得られた財集合 X_k は,
要素数 k 個の条件の下で利得最大の財集合である.

- k に関する帰納法で証明
- $X_0 = \emptyset$ は要素数 0 の唯一の集合
  ∴要素数 k 個の条件の下で f を最大にする
- 集合 X_k が 要素数 k 個の条件の下で f を最大にすると仮定,
  集合 X_{k+1} について成り立つことを証明する.
- $Y \subseteq N$:要素数 k+1 個の条件の下で f を最大にする集合の中で,
  $|Y - X_k|$ が最小とする.

$|Y - X_k|=1$ ➔ $Y = X_k \cup \{i\}$ の形なので, $f(X_{k+1}) \geqq f(Y)$
∴集合 X_{k+1} は 要素数 k+1 個の条件の下で f を最大

アルゴリズムの正当性: (i) の証明

(i) k 回目の反復で得られた財集合 X_k は,
要素数 k 個の条件の下で利得最大の財集合である.

（つづき）$|Y - X_k| \geqq 2$ と仮定，矛盾を導く.

- $|Y|>|X_k|$ なので，ある $u \in Y-X_k$ がとれる.

➔ f はM♮凹関数なので，(a) or (b) 成立

(a) $f(Y) + f(X_k) \leq f(Y - u) + f(X_k + u)$

(b) $\exists v \in X_k \setminus Y$: $f(Y) + f(X_k) \leq f(Y - u + v) + f(X_k + u - v)$

(b) の場合のみ証明: $|Y - u + v| = k + 1$, $|X_k + u - v| = k$ なので,

$$f(Y) \geq f(Y - u + v), \qquad f(X_k) \geq f(X_k + u - v)$$

(b) の不等式と合わせて，$f(Y) = f(Y - u + v)$

つまり，$Y - u + v$ も要素数 k+1 個の条件の下で f を最大にする

$|(Y - u + v) - X_k| = |Y - X_k| - 1$ よって Y の選び方に矛盾.

アルゴリズムの正当性: (ii) の証明

(ii) k=1,2,...,n-1 に対し, $2f(X_k) \geqq f(X_{k-1}) + f(X_{k+1})$

証明: $X_{k+1} \supseteq X_{k-1}$ なので $u \in X_{k+1} - X_{k-1}$ がとれる.

f はM♮凹関数, $X_{k-1} - X_{k+1} = \emptyset$ なので, (a) のみ成立

$$f(X_{k+1}) + f(X_{k-1}) \leq f(X_{k+1} - u) + f(X_{k-1} + u) \leq 2f(X_k)$$

(最後の不等式は $|X_{k+1} - u| = |X_{k-1} + u| = k$ より)

(iii) $f(X_{k+1}) \leqq f(X_k) \geqq f(X_{k-1})$ ならば, X_k は f を最大にする集合

証明: (ii) の不等式より, 任意の h に対して

$f(X_h) - f(X_{h-1}) \geqq f(X_{h+1}) - f(X_h)$

つまり, $f(X_h) - f(X_{h-1})$ は h に関して単調非増加

よって, $f(X_k) - f(X_{k-1}) \geqq 0$ なので $f(X_h) - f(X_{h-1}) \geqq 0$ (h=1,2,...,k)

$f(X_{k+1}) - f(X_k) \leqq 0$ なので $f(X_{h+1}) - f(X_h) \leqq 0$ (h=k,k+1,...,n-1)

∴ X_k は f を最大にする

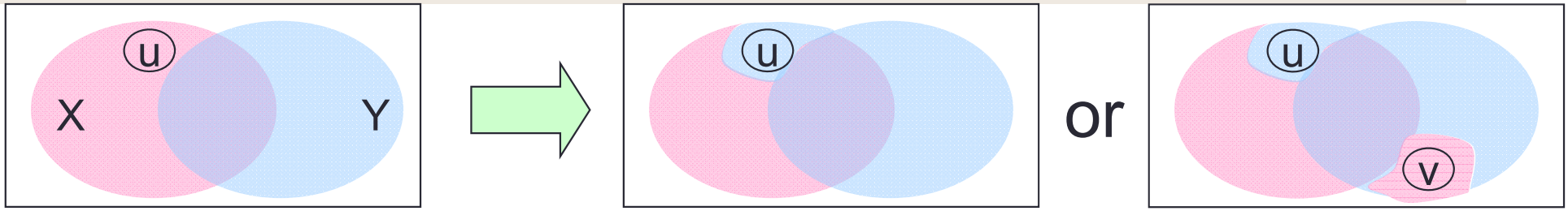
粗代替性と等価な性質：M♮凹性

定義： M♮凹性(M♮-concavity) [Murota-Shioura(1999)]

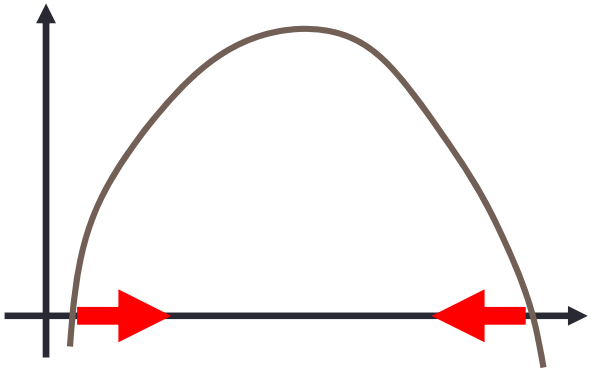
$\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$

(ii) $\exists v \in Y \setminus X$: $f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$



- 離散的な凹関数
- 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]：
評価関数 f_i は粗代替性を満たす←→M♮凹性を満たす

粗代替性，単改良性，M♮凹性の関係

- 評価関数 $v_i: 2^N \to \mathbb{R}$ に対し，

  粗代替性←→単改良性←→M♮凹性

- 等価な条件ではあるが，ある主張を示す際の「使いやすさ」では

  M♮凹性がよい．　粗代替性は使いにくい

- 実際，「M♮凹性→単改良性」「M♮凹性→粗代替性」

  「単改良性→粗代替性」は（比較的）証明しやすいが，逆は難しい

M♮凹性➔単改良性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $X \subseteq N, X \notin D_i(p)$ とする.
単改良性の (i), (ii), または (iii) が成り立つことを示す.
要素数$|X \setminus Y| + |Y \setminus X|$最小の$Y \in D_i(p)$を選ぶ.
$X \neq Y$なので, $X \setminus Y \neq \emptyset$または$Y \setminus X \neq \emptyset$
(Case 1) $X \setminus Y \neq \emptyset$
$u \in X \setminus Y$ とすると, M♮凹性より$v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - u) + v_i(Y + u)$
または $\exists v \in Y \setminus X$ s.t.$v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - u + v) + v_i(Y + u - v)$
後者の場合を考える(前者も同様). $Y' = Y + u - v$ とおく.
$p(X) + p\,(Y) = p(X - u + v) + p(Y')$ より,
(A) $v_i(X) - p(X) + v_i(Y) - p(Y) \leq v_i(X - u + v) - p(X - u + v) + v_i(Y') - p(Y')$
$|X \setminus Y'| + |Y' \setminus X| < |X \setminus Y| + |Y \setminus X|$より, $Y' \notin D_i(p)$
$\therefore v_i(Y') - p(Y') < v_i(Y) - p(Y)$
式(A) と合わせて, $v_i(X) - p(X) < v_i(X - u + v) - p(X - u + v)$
∴ 単改良性の (iii) 成立

(Case 2) $Y \setminus X \neq \emptyset$ はCase 1と同様に証明できるので省略

ワルラス均衡と総評価値最大化

- 単一需要モデルの場合： 総評価値最大の配分➔均衡配分

定理：
最大重みマッチングに対応する財の配分$\alpha(i)$ $(i \in B)$ に対し，
ある価格$p(j)$ $(j \in N)$ が存在し，これらの組は均衡となる

- 複数需要モデルの場合： 評価関数が粗代替性を満たすとき
総評価値最大の配分➔均衡配分

定理： 入札者の評価関数は粗代替性を満たすと仮定．
このとき，最大化問題 $\max\{\sum_{i=1}^{m} f_i(Y_i) \mid (Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$は財の配分$\}$
の最適解$(X_0, X_1, \ldots, X_m)$に対し，
ある価格$p(j)$ $(j \in N)$ が存在し，これらの組は均衡となる

（証明の概略）整数計画問題として定式化→LPに緩和
相補性を用いた最適性条件より均衡であることを証明

双対性を用いた証明（1）

- 総評価値最大化問題を，整数計画問題として定式化

最大化 $\sum_{i \in B} \sum_{Y \subseteq N} v_i(Y) x_{i,Y}$

条件 $\sum_{Y \subseteq N} x_{i,Y} = 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{i \in B} \sum_{j \in Y \subseteq N} x_{i,Y} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{i,Y} \in \{0,1\} \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

この問題の最適解 ←→総評価値を最大化する配分における

$X_1, X_2, \ldots, X_m$

双対性を用いた証明(2)

$x_{i,Y} \in \{0,1\}$　を不等式条件　$x_{i,Y} \geq 0$　に緩める

→　線形計画問題へ

- 得られた線形計画問題の任意の許容解は $x_{i,Y} \leq 1$ を満たす
- 最適解$x^*_{i,Y}$は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 ➔ 元の整数計画問題の最適解

➔総評価値を最大化する配分に対応

定理:　前のスライドの整数計画問題の最適解は,

上記の線形計画問題の最適解

(証明の概略) 評価関数が粗代替性を満たす → M♮凹性を満たす

この性質を使って, 非零な $x_{i,Y}$ の数を減らす➔整数解になる

双対性を用いた証明(3)

線形計画緩和の双対問題

最小化 $\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$

条件 $q(i) + \sum_{j\in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

線形計画問題に対する相補性定理を適用して，以下が得られる

定理: 線形計画問題の主問題の許容解 $x_{i,Y}$ は最適解

←→ 以下の条件を満たす，双対問題の解が存在

$q(i) + \sum_{j\in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

$x_{i,Y} > 0$ ならば $q(i) + \sum_{j\in Y} p(j) = v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$

$\sum_{i\in B} \sum_{j\in Y\subseteq N} x_{i,Y} < 1$ ならば $p(j) = 0 (\forall j \in N)$

双対性を用いた証明(4)

主問題の許容解 $x_{i,Y}$ が財の配分に対応する場合,
相補性条件(最後の2条件)は下記のように書き換えられる

$X_i = Y$ ➔ $q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) = v_i(Y)$
$j \in N$ が誰にも配分されない ➔ $p(j) = 0$

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる(証明終わり)

定理: 財の配分$X_0, X_1, \ldots, X_m$は総評価値が最大
⬅➡ 以下の条件を満たす, 双対問題の解が存在
$q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) \geq v_i(Y) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$
$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$
$X_i = Y$ ➔ $q(i) + \sum_{j \in Y} p(j) = v_i(Y)$
$j \in N$ が誰にも配分されない ➔ $p(j) = 0$

双対性を用いた証明(5)

- $q(i) = v(i,j) - \sum_{j \in X_i} p(j)$ を使って変数 q(i) を消去する

定理: 財の配分$X_0, X_1, \ldots, X_m$は総評価値が最大
←→ 以下の条件を満たす価格p(j) (j∈N)が存在
$v(i,j) - \sum_{j \in X_i} p(j) \geq v_i(Y) - \sum_{j \in Y} p(j) \quad (\forall i \in B, \forall Y \subseteq N)$
$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$, $j \in N$ が誰にも配分されない → $p(j) = 0$

均衡の計算：評価値が既知の場合

- 前のスライドの定理より，総評価値最大の財の配分は均衡配分
- 総評価値最大配分の計算： 増加路を使ったアルゴリズムを（大幅に）一般化した方法により可能
- 均衡配分 $X_0, X_1, \ldots, X_m$ が得られた → 均衡価格の計算へ
  - $X_i \in D_i(p)\ (i = 1, \ldots, m), p(j) = 0\ (j \in X_0)$ を満たす p を求める

→最短路問題（差分不等式系の解を求める問題）に帰着可能

$$p(h) - p(j) \geq v_i(X_i - j + h) - v_i(X_i) \quad (j \in X_i, h \in N - X_i)$$

$$p(h) \geq v_i(X_i + h) - v_i(X_i) \quad (h \in N - X_i)$$

$$-p(j) \geq v_i(X_i - j) - v_i(X_i) \quad (j \in X_i)$$

- 総評価値最大の配分の計算と同時に計算することも可能

レポート問題

次の評価関数について考える．ただし，

$N = \{1,2,3,4\}$, $v_1 = 5, v_2 = 7, v_3 = 4, v_4 = 3$

$v_i(\emptyset) = 0, v_i(\{j\}) = v_j$,

$|X| \geq 2$ のとき：$v_i(X) = \{v_j | j \in X\}$ の中の

最大値＋2番目に大きい値

（例：$v_i(\{4\}) = 3$, $v_i(\{1,4\}) = 5 + 3 = 8$, $v_i(\{2,3,4\}) = 7 + 4 = 11$）

問1：価格p=(1,2,0,0)，q=(1,5,0,0) に対する$D_i(p), D_i(q)$を計算せよ

問2：各 $X \in D_i(p)$ に対し，$Y \supseteq X \setminus \{2\}$ を満たす$Y \in D_i(q)$ を求めよ

問3：$X \notin D_i(p)$ なる各財集合 X に対し，単改良性の条件を満たす財集合 Y を求めよ

問4：X={2,4}, Y={1,3,4}, u=2 に対し，

$$v_i(X) + v_i(Y) \leq v_i(X - u + v) + v_i(Y + u - v)$$

を満たす$v \in Y \setminus X$ を求めよ