

数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと

離散最適化

第9回 均衡を近似的に計算するアルゴリズム

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

評価値が既知の場合のアルゴリズム

定理：財の均衡配分 \leftrightarrow 評価値に関する最大重みマッチング

∴ 評価値が既知 \rightarrow

均衡配分の計算は、最大重みマッチング問題に帰着可能

均衡配分が得られた \rightarrow

均衡価格の計算は、最短路問題に帰着可能

評価値が分からぬ場合は？

評価値の扱いについて

入札者の評価値は個人情報

→ オークション主催者に 直接 知らせたくない

代案：評価値の情報を **間接的に** 伝える

(例：所与の価格に関して、利得最大の財)

1. 主催者：各財の暫定価格を決定

2. 各入札者：暫定価格の下で**利得最大の財**を報告

3. 入札者全員に(重複無く)最も欲しい財を

配分可能 → 終了。現在の価格は均衡価格

配分不可能 → 主催者は暫定価格を適切に変更

反復オークション と呼ばれる

単一財の場合 → **イングリッシュ・オークション** など

反復オークションのアルゴリズム

以下の2つを紹介

- その1: 均衡を近似的に計算
 - 単調に価格を増加, **均衡配分**
(および(極小)均衡価格の近似値)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**ひとつ**の情報が必要
 - 価格増加のルールは簡単: 希望が重複→価格を増やす
- その2: 均衡を厳密に計算
 - 単調に価格を増加, (極小) **均衡価格**
(および均衡配分)を求める
 - 各反復で, 入札者の利得最大の財**すべて**の情報が必要
 - 価格増加のルールは複雑:
 - 得た情報を使い, 価格を増やす財をうまく選ぶ

均衡を近似的に計算するアルゴリズム

アルゴリズムの流れ

- 各入札者は、現在の価格の下で利得最大の財を一つ選ぶ
- 同じ財を複数の入札者が選ぶ
→ ひとりに割り当て。その財の価格を上昇させる。

異なる分野で独立に提案される

- Bertsekas (1979) --- 数理計画、オペレーションズ・リサーチ
 - 最大重みマッチング問題のアルゴリズムとして提案
 - この分野では「オークションアルゴリズム」と呼ばれる
- Crawford, Knoer (1981) --- 数理経済、オークション理論
 - ワルラス均衡(の近似解)を求めるアルゴリズムとして提案
 - Demange, Gale, Sotomayor (1986) に詳しい記述、解析あり

均衡を近似的に計算するアルゴリズム: 詳細

δ : アルゴリズムのパラメータ, > 0

ステップ0: 全ての財の価格 $p(j)$ を 0 にする.

各入札者は財の割当なし, とする.

ステップ1: 各入札者 i に対し,

財の割当あり or 最大利得 $\leq 0 \rightarrow$ 終了

ステップ2: 財の割当なし, かつ 最大利得 > 0 なる

入札者 i を選ぶ.

ステップ3: $v(i,j) - p(j)$ 最大の j を選び, 入札者 i に財 j を割り当てる.

入札者 k が既に財 j に割り当てられていた

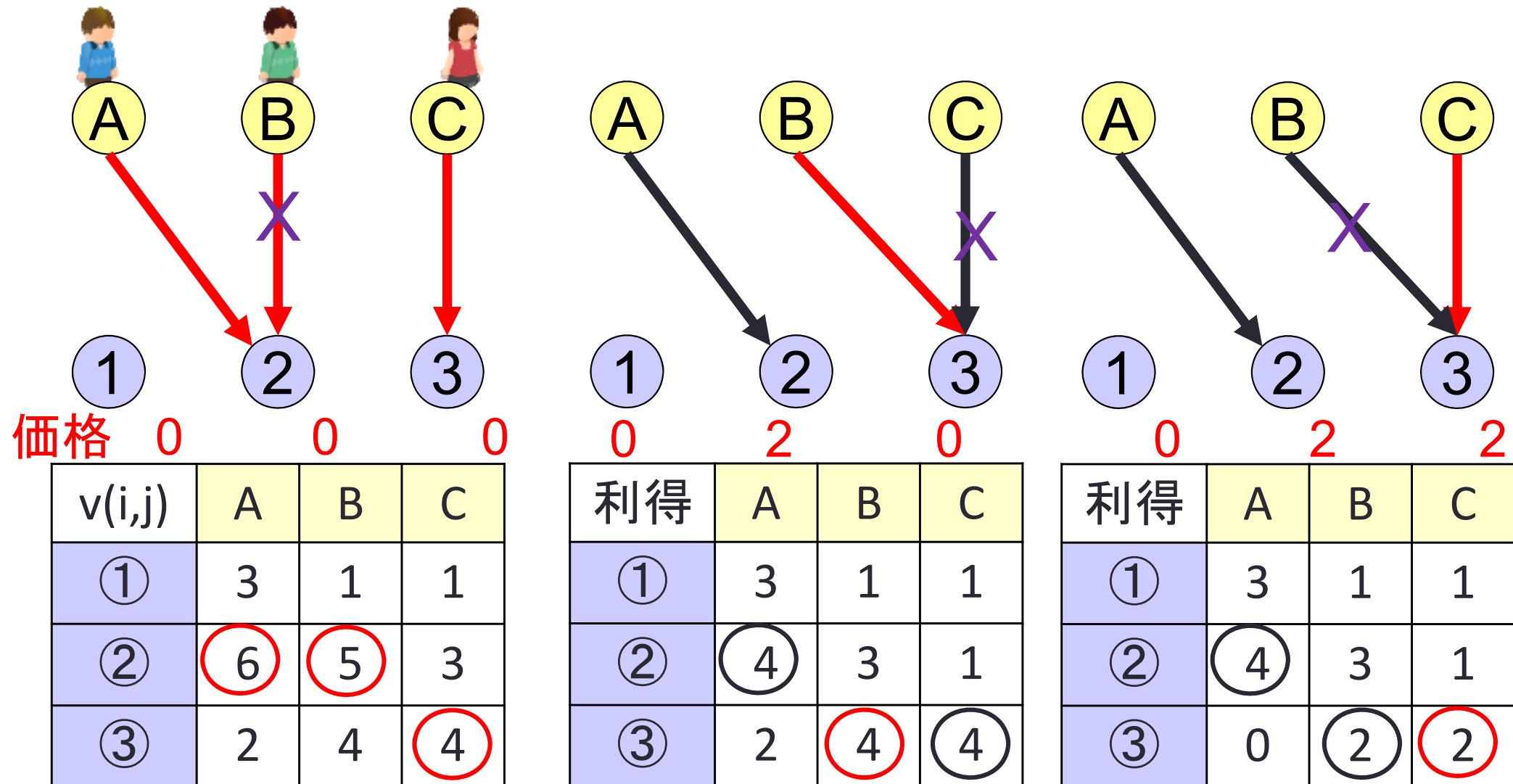
$\rightarrow k$ への j の割り当てを取消す. $p(j) := p(j) + \delta$

$$\max_j \{v(i,j) - p(j)\}$$

ステップ1へ.

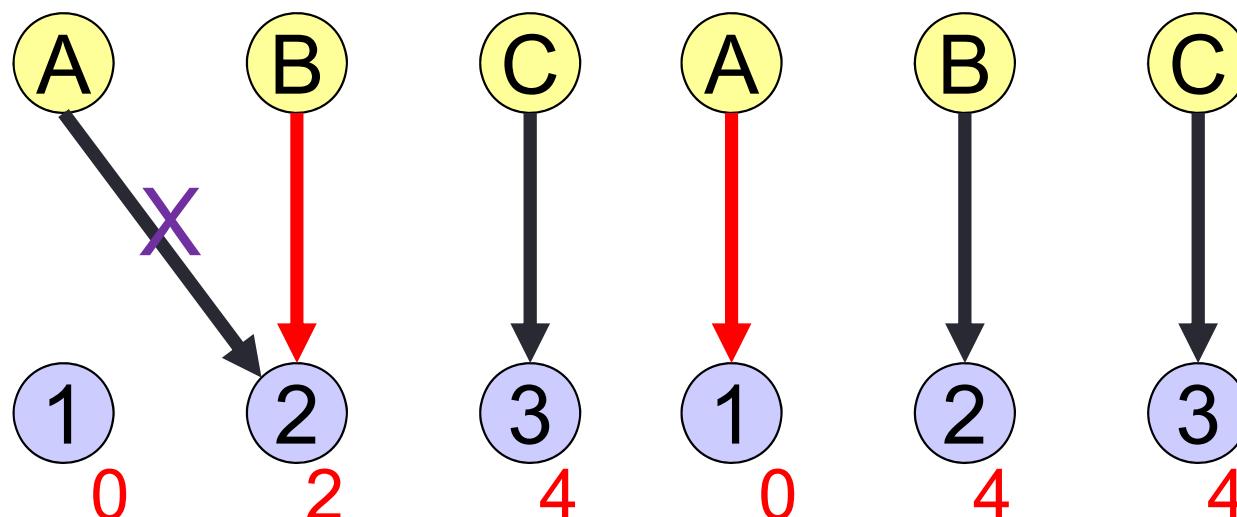
アルゴリズムの実行例(1)

$\delta=2$ のとき



アルゴリズムの実行例(1)

$\delta=2$ のとき



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	-2	0	0

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	2	1	-1
③	-2	0	0

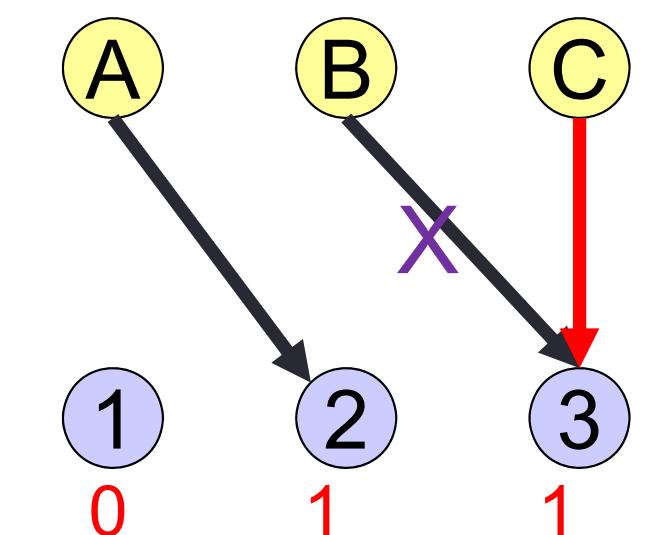
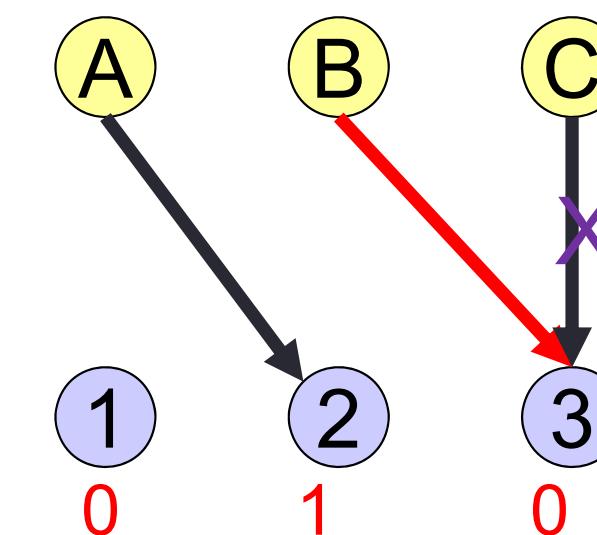
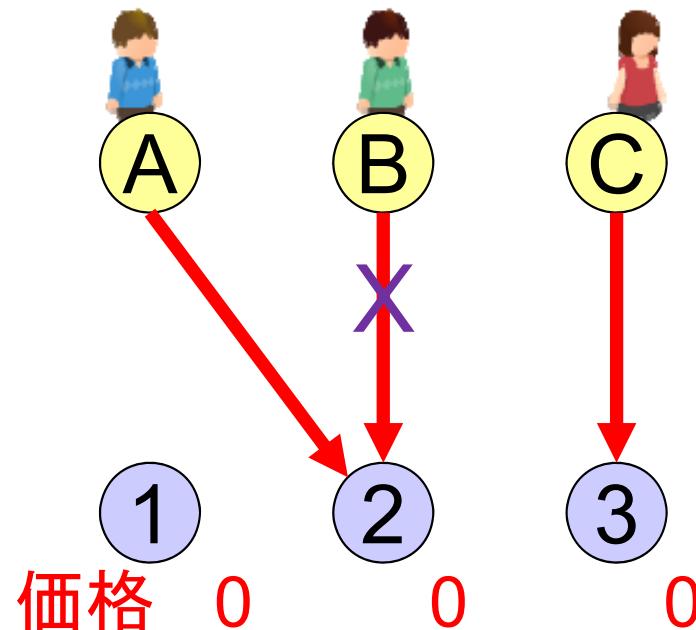
終了
均衡配分○
均衡価格○

参考:
極小均衡価格

0 3 2

アルゴリズムの実行例(2)

$\delta=1$ のとき



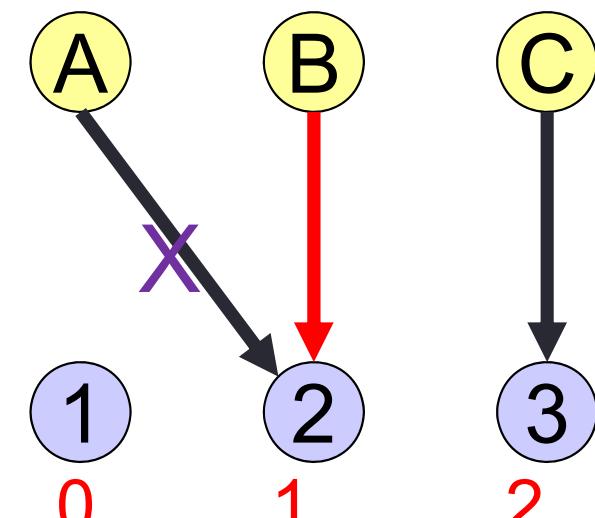
v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	2	4	4

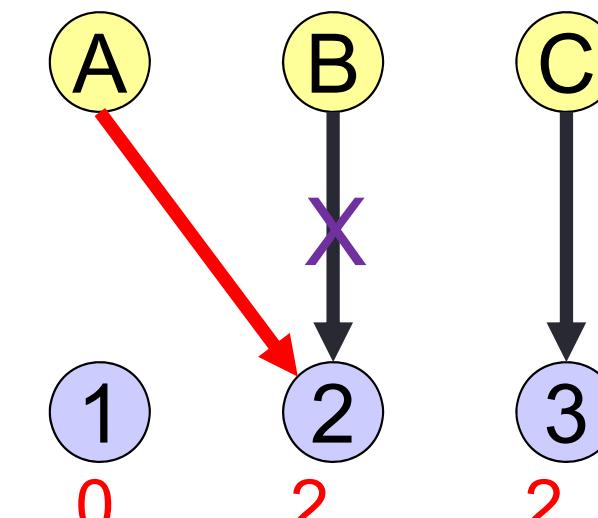
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例(2)

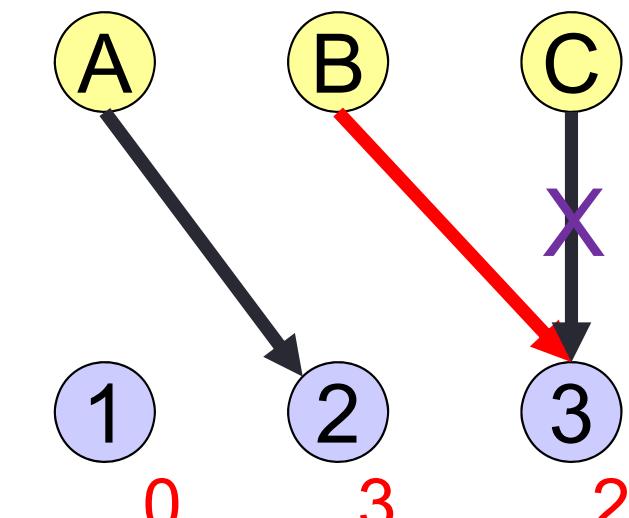
$\delta=1$ のとき



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	0	2	2



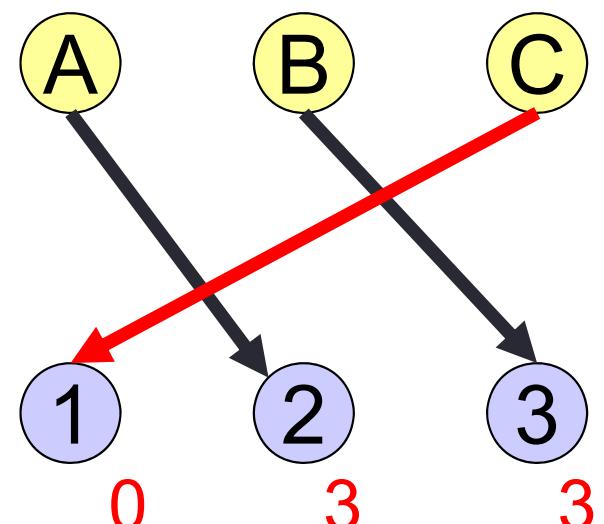
利得	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0	2	2



利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2

アルゴリズムの実行例(2)

$\delta=1$ のとき

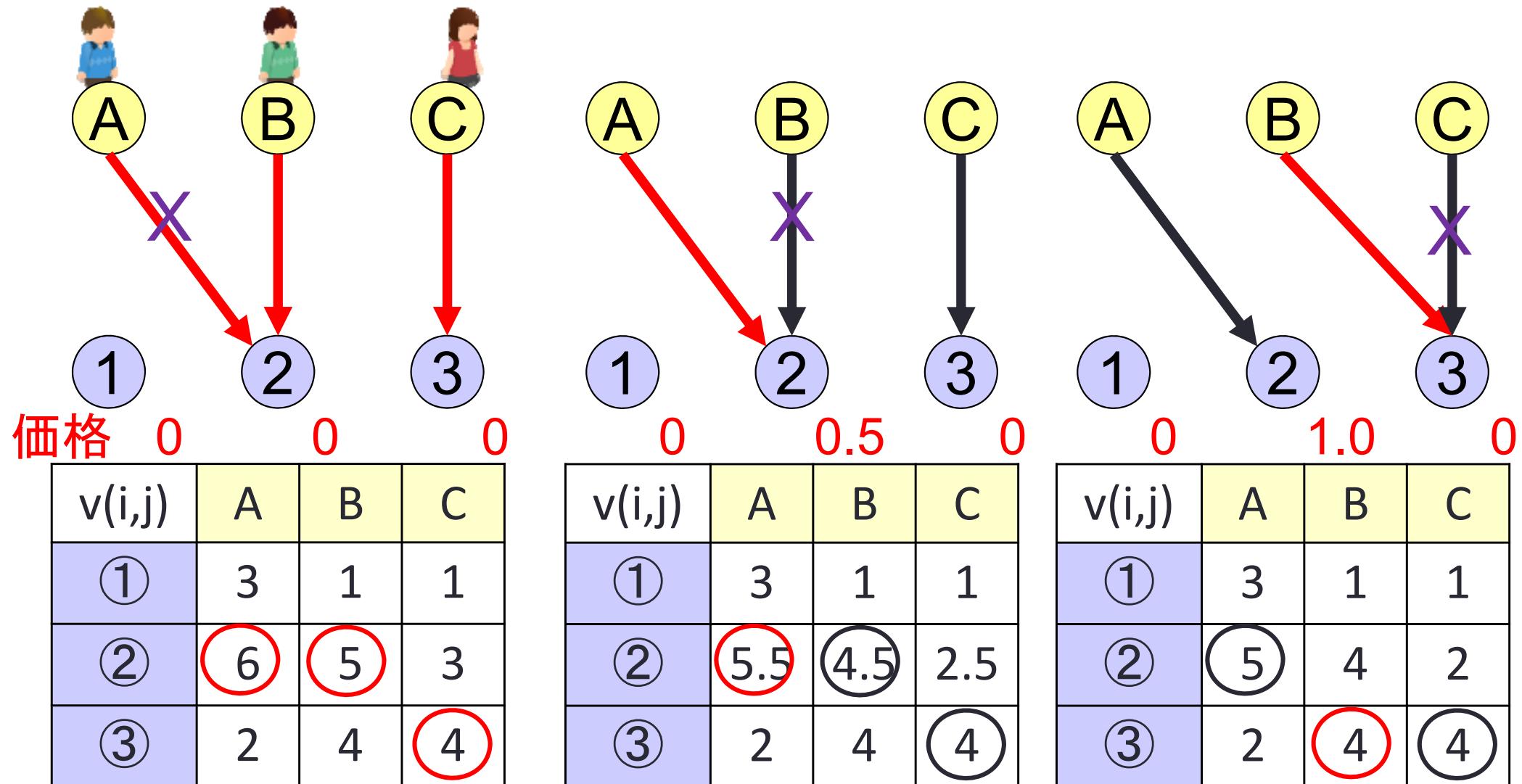


利得	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	-1	1	1

終了
均衡配分 ×
均衡価格○

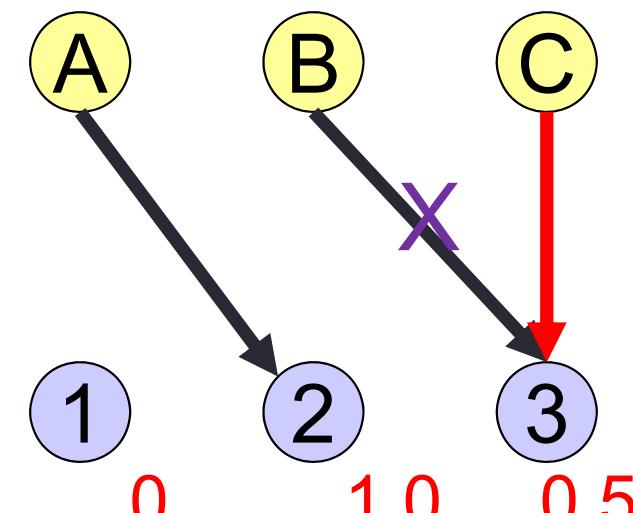
アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき

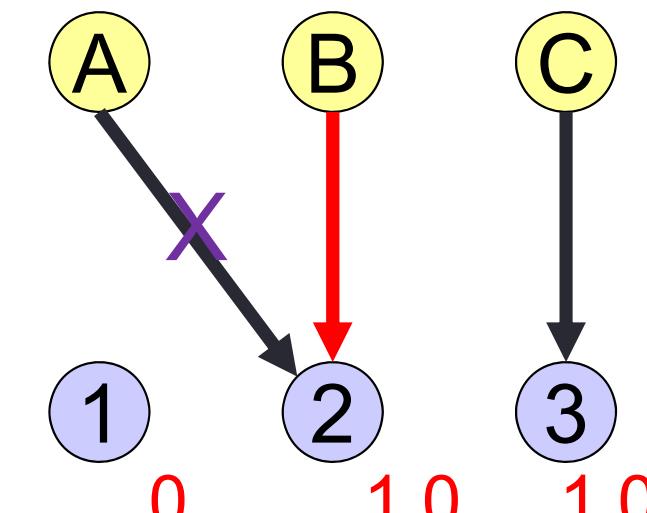


アルゴリズムの実行例(3)

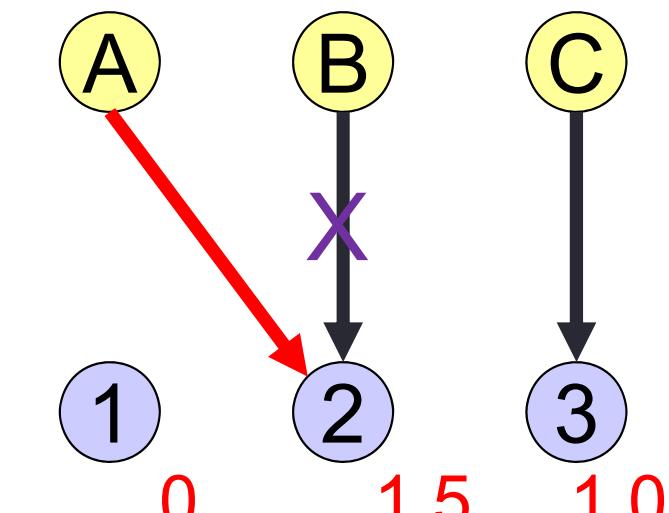
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1.5	3.5	3.5



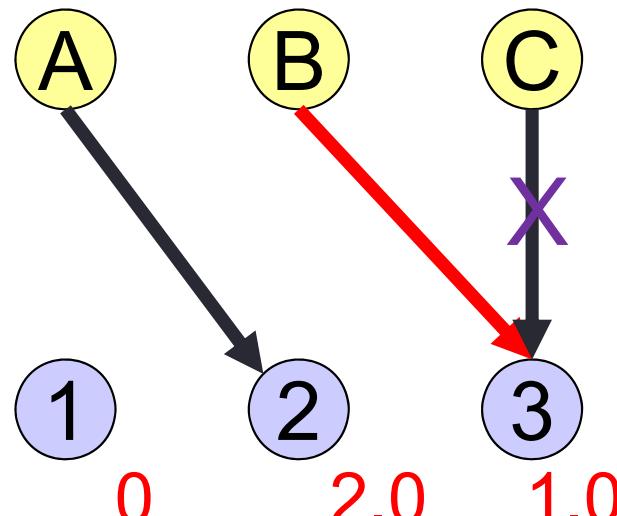
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	5	4	2
③	1	3	3



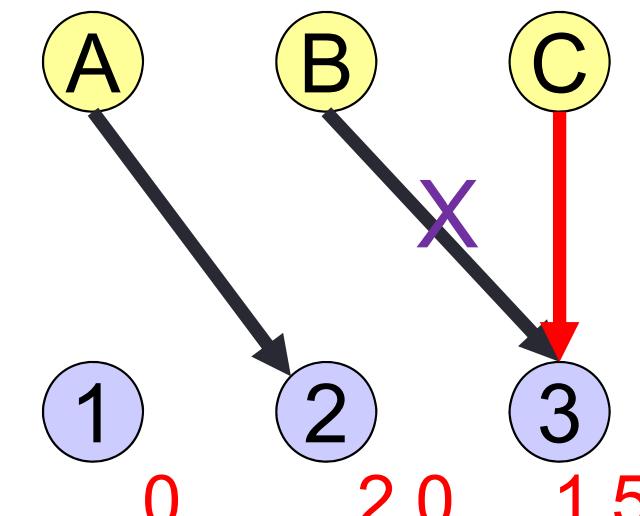
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	4.5	3.5	1.5
③	1	3	3

アルゴリズムの実行例(3)

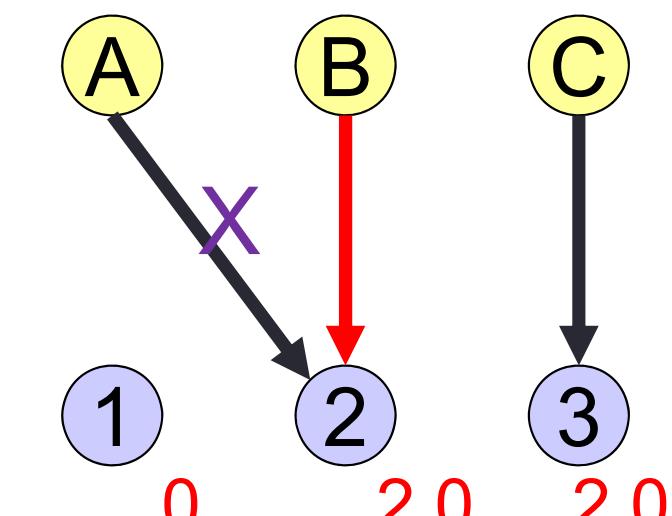
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	1	3	3



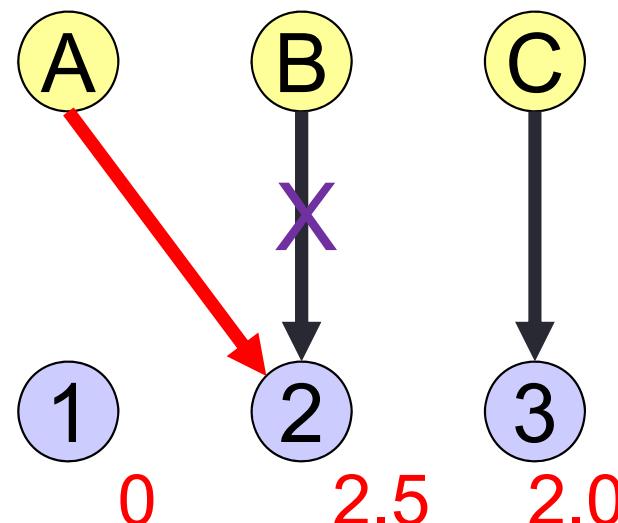
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0.5	2.5	2.5



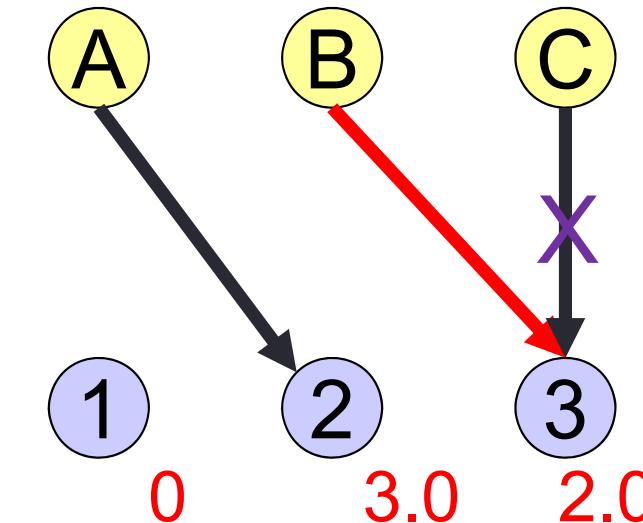
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	4	3	1
③	0	2	2

アルゴリズムの実行例(3)

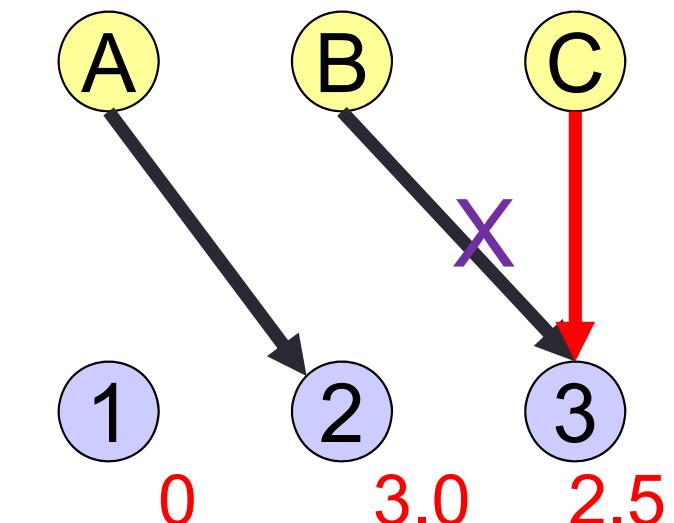
$\delta=0.5$ のとき



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3.5	2.5	0.5
③	0	2	2



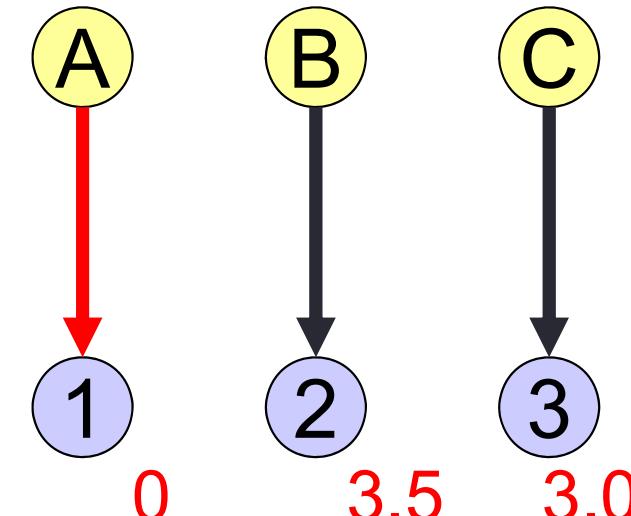
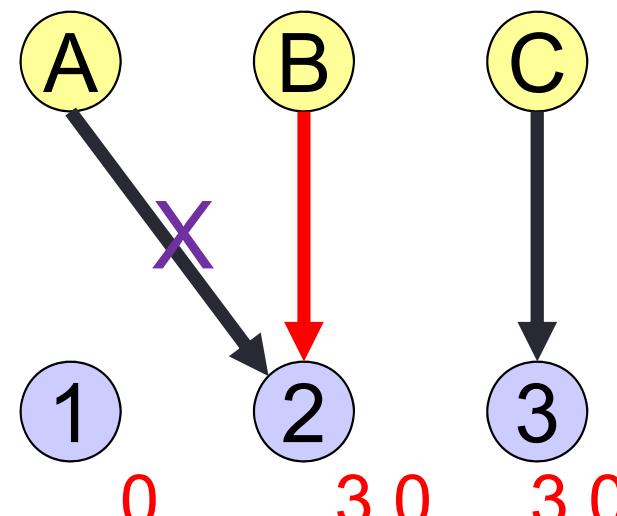
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	0	2	2



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	3	2	0
③	-0.5	1.5	1.5

アルゴリズムの実行例(3)

$\delta=0.5$ のとき



終了
均衡配分○
均衡価格○

アルゴリズムの性能評価

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

得られたマッチングの重み \doteq 最大重み

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
 M の重み \geq 最大重みマッチングの重み $- \delta \min\{|B|, |N|\}$

得られた財の価格 \doteq 均衡価格

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 $p(j)$,
 最小均衡価格 $p^*(j)$

$$\rightarrow |p(j) - p^*(j)| \leq \delta \min\{|B|, |N|\}$$

証明は省略

厳密な均衡を得る

評価値 $v(i,j)$ がすべて整数

→ δ を調整して、均衡配分、均衡価格の厳密値を得ることが可能

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し、

$$M\text{の重み} \geq \text{最大重みマッチングの重み} - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

$\delta < 1/\min\{|B|, |N|\}$ とする

→ $M\text{の重み} > \text{最大重みマッチングの重み} - 1$

→ マッチングの重みは整数なので、 $M\text{の重み} = \text{最大重み}$

定理3 アルゴリズムにより得られた財の価格 $p(j)$,

$$\text{最小均衡価格 } p^*(j) \rightarrow |p(j) - p^*(j)| \leq \delta \min\{|B|, |N|\}$$

$\delta < 1/2 \min\{|B|, |N|\}$ とする

→ $|p(j) - p^*(j)| < 0.5$

→ $p^*(j)$ は整数なので、 $p(j)$ を最も近い整数に丸め = $p^*(j)$

定理1の証明

定理1 アルゴリズムは有限回の反復後に終了する

[証明]

- 各財の価格：初期値=0
 - アルゴリズムの各反復：
ある財 j の価格 $p(j)$ が δ 増加 ($\rightarrow v(i,j)-p(j)$ が δ 減少)
 - すべての入札者 i に対し $v(i,j)-p(j) < 0$
 \rightarrow 財 j の価格は今後変化しない
- \therefore 財 j の価格 $p(j)$ の増加回数 $\leq \max_{i \in B} v(i,j) / \delta$

定理2の証明: 準備その1

定理2 アルゴリズムにより得られたマッチング M に対し,
 M の重み \geq 最大重みマッチングの重み $- \delta \min\{|B|, |N|\}$

命題1: アルゴリズム終了時に,
 誰にも割り当てられなかった財 j の価格 $p(j) = 0$

[証明] アルゴリズムの途中で財が誰かに割り当て
 → その財の価格 > 0 となる
 \therefore アルゴリズム終了時に割り当てなしの財 j : $p(j)=0$

定義: 入札者 i は δ -happy \leftrightarrow 条件 (a) or (b) を満たす

(a) [利得が「ほぼ」最大の財が割当]

i に財 j が割り当てられていて, $v(i, j) - p(j) \geq -\delta$

かつ $v(i, j) - p(j) \geq \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} - \delta$

(b) [最大利得が非正]

i に財の割当なし, かつ $\max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$

定理2の証明:準備その2

命題2:

- (i) 財の配分と価格が均衡 \rightarrow すべての入札者は 0-happy
 $(\because$ 均衡の第一条件は, (a) において $\delta=0$ とおいたものに一致)
- (ii) ステップ3で入札者 i に財 j が割り当て
 $\rightarrow i$ は δ -happy (財 j が他の入札者に奪われるまでずっと)
 $(\because$ 財 j を選んだ時点では, j は最大利得 \rightarrow 直後に価格が δ 減少.
 他の入札者に奪われるまでは価格 $p(j)$ 不変)
- (iii) アルゴリズム終了時には, 全員が δ -happy
 $(\because$ 入札者に財の割り当てあり \rightarrow (ii) より(a) 成立
 なし \rightarrow (b) 成立)

定理2の証明(その1)

記号の定義

$\alpha(i) (i \in B)$: アルゴリズム終了時の財の配分

B_α = アルゴリズム終了時に財が配分された入札者の集合

→ $\{\alpha(i) | i \in B_\alpha\}$ = アルゴリズム終了時, 入札者に配分された財の集合

$\alpha^*(i) (i \in B)$: 最大重みマッチング M^* に対応する財の配分

$B^* = M^*$ において, 財が配分された入札者の集合

→ $\{\alpha^*(i) | i \in B^*\} = M^*$ において入札者に配分された財の集合

示したい不等式

$$\sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) \geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v(i, \alpha^*(i)) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

この不等式の代わりに, 以下の等価な不等式を示す:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i \in B_\alpha} v(i, \alpha(i)) - \sum_{j \in N} p(j)$$

$$\geq \sum_{i \in B_{\alpha^*}} v(i, \alpha^*(i)) - \sum_{j \in N} p(j) - \delta \min\{|B|, |N|\}$$

定理2の証明(その2)

- ①を示すために、以下の不等式を示す(証明は後ほど)：
- ② $v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$
 - ③ $v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq -\delta \quad (\forall i \in B_\alpha \setminus B^*)$
 - ④ $0 \geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) \quad (\forall i \in B^* \setminus B_\alpha)$
 - ⑤ $-p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) \mid i \in B_\alpha\})$
 - ⑥ $0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) \mid i \in B^*\})$
- ②--⑥を辺々加える → ①が得られる

定理2の証明(その3)

②--⑥を辺々加えたときの

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sum_{i \in B_\alpha} [\nu(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i))] - \sum_{j \in N \setminus \{\alpha(i) \mid i \in B_\alpha\}} p(j) \\ &= \sum_{i \in B_\alpha} \nu(i, \alpha(i)) - \sum_{j \in N} p(j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \sum_{i \in B_\alpha \cap B^*} [\nu(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta] - \delta |B_\alpha \setminus B^*| \\ &\quad + \sum_{i \in B^* \setminus B_\alpha} [\nu(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j \in N \setminus \{\alpha^*(i) \mid i \in B^*\}} p(j) \\ &= \sum_{i \in B^*} [\nu(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))] - \sum_{j \in N \setminus \{\alpha^*(i) \mid i \in B^*\}} p(j) - \delta |B_\alpha| \\ &= \sum_{i \in B^*} \nu(i, \alpha^*(i)) - \sum_{j \in N} p(j) - \delta |B_\alpha| \\ &\geq \sum_{i \in B^*} \nu(i, \alpha^*(i)) - \sum_{j \in N} p(j) - \delta \min\{|B|, |N|\} \end{aligned}$$

(最後の不等号は $|B_\alpha| \leq \min\{|B|, |N|\}$ より)

\therefore ①成立

定理2の証明(その4)

- ② $v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i)) - \delta \quad (\forall i \in B_\alpha \cap B^*)$
- ③ $v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq -\delta \quad (\forall i \in B \setminus B^*)$ の証明

入札者 $i \in B_\alpha$ は、アルゴリズム終了時に
 δ -happy の条件 (a) を満たす (\because 命題2 (iii))

$$v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq -\delta \quad \rightarrow ③$$

$$⑦ \quad v(i, \alpha(i)) - p(\alpha(i)) \geq \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} - \delta$$

$$i \in B_{\alpha^*} \text{ ならば } \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \geq v(i, \alpha^*(i)) - p(\alpha^*(i))$$

この式と⑦ \rightarrow ②

定理2の証明(その5)

$$\textcircled{5} \quad -p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha(i) \mid i \in B_\alpha\})$$

$$\textcircled{6} \quad 0 \geq -p(j) \quad (\forall j \in N \setminus \{\alpha^*(i) \mid i \in B^*\}) \quad \text{の証明}$$

\textcircled{6}はアルゴリズムでの価格の非負性より自明。

$j \in N \setminus \{\alpha(i) \mid i \in B_\alpha\}$ はアルゴリズム終了時に割り当てられていない財

→ 命題1より $p(j)=0 \rightarrow \textcircled{5}$

演習問題

下記のように評価値が与えられたとき, $\delta=1$ として,
均衡を近似的に計算するアルゴリズムを適用して
均衡の近似解を計算せよ. 計算の過程も書くこと.

(1)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(3)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

(2)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

それぞれの極小均衡価格は以下の通り
 問1 : $p(1)=2, p(2)=6$
 問2 : $p(1)=0, p(2)=4, p(3)=5$
 問3 : $p(1)=0, p(2)=3, p(3)=4, p(4)=0$