

数理経済学特講

複数財に対するオーケションの 数理とアルゴリズム

第8回 最大重みマッチングと均衡の関係

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.aaa@m.titech.ac.jp

双対問題の最適解の性質

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) \\ \text{条件} & q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N) \\ & q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B) \\ & p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N) \end{array}$$

命題： q, p が最適解ならば $q(i) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$

(証明) 各変数 $q(i)$ はなるべく小さくしたい

- $q(i) \geq v(i, j) - p(j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$
- $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$$\therefore q(i) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$$
 ■

均衡の定義

定義：財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は ワルラス均衡 (競争均衡)
 \Leftrightarrow

- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\Rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\Rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割り当てられない $\Rightarrow p(j) = 0$

3

均衡の定義

定義：財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ および財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は ワルラス均衡 (競争均衡)
 \Leftrightarrow

- 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j$)
 $\Rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$
- 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\Rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$
- 財 j が誰にも割り当てられない $\Rightarrow p(j) = 0$

4

最大重みマッチングと均衡の関係

相補性定理

最大重みマッチングと双対問題の最適解 = ワルラス均衡

定理1:

任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q, p) に対し、
 M は最大重みマッチング、かつ (q, p) は双対問題の最適解
↔ M に応する財の配分と価格 p は均衡

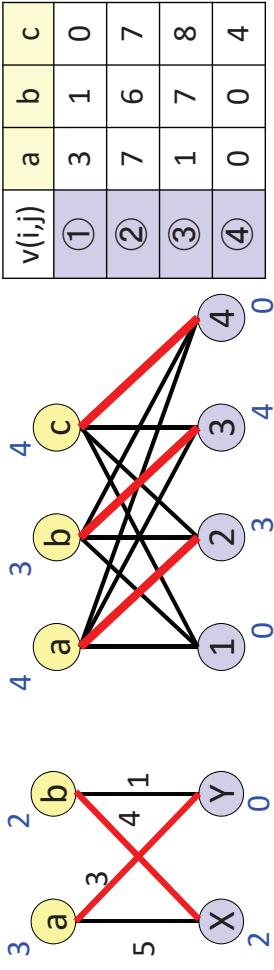
定理2:

任意の財の配分 α と財の価格 p に対し、

$$q(i) \quad (i \in B) \text{ を } q(i) = \max \left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \right] \text{ により定義}$$

このとき、
配分 α と価格 p は均衡

↔ 配分 α に対応するマッチングは最大重み、
かつ (q, p) は双対問題の最適解



6

最大重みマッチング問題と双対問題の実行可能解が
最適解であるための必要十分条件

任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q, p) に対し、
 M は最大重みマッチング、かつ (q, p) は双対問題の最適解
↔ 以下の条件が成立：
マッチング M に含まれる任意の枝に対し、 $q(i)+p(j) = v(i, j)$
 $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない → $q(i)=0$
 $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない → $p(j)=0$

8

定理1の証明(続き)

①-④の条件の下で、 $q(i) = \max \left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \right]$ が成立。
よって、条件から変数 $q(i)$ を消去できる：

- ① 任意の財 j に対し、 $p(j) \geq 0$
- ② 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j \neq 0$)
 $\rightarrow 0 \leq v(i, j) - p(j) = \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\}$ ($\because v(i, j) - p(j) = q(i)$)
- ③ 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$)
 $\rightarrow \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i, h) - p(h)\} \leq 0$ ($\because q(i) = 0$)
- ④ 財 j が誰にも割り当てられない → $p(j) = 0$

これらの条件は、均衡の条件そのものの

定理2の証明も同様にできる ■

7

定理1の証明

相補性定理より、
 M は最大重みマッチング、かつ (q, p) は双対問題の最適解
↔ M はマッチング、 (α, p) は双対問題の実行可能解であり、
マッチング M に含まれる任意の枝に対し、 $q(i)+p(j) = v(i, j)$
 $i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない → $q(i)=0$
 $j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない → $p(j)=0$

マッチング M に対応する財の配分 α を使い、上記の条件を書き換える：
① 任意の入札者 i と財 j に対し、 $q(i) \geq 0, p(j) \geq 0, q(i)+p(j) \geq v(i, j)$
② 入札者 i に財 j が割り当てられる ($\alpha(i) = j \neq 0$) → $q(i)+p(j) = v(i, j)$
③ 入札者 i に財の割り当てがない ($\alpha(i) = 0$) → $q(i) = 0$
④ 財 j が誰にも割り当てられない → $p(j) = 0$

関連する話題：割当ゲーム

- B: 雇用者(仕事)の集合
- N: 労働者の集合
- 労働者 j が仕事 i に従事 → 収益 $v(i,j)$ (≥ 0)

労働者の仕事への割当で得た収益をうまく配分

• $q(i)$ = 仕事 i の雇用者の取り分 (≥ 0)

• $p(j)$ = 労働者 j の取り分 (≥ 0)

• 労働者 j が仕事 i に従事 → $q(i) + p(j) = v(i,j)$

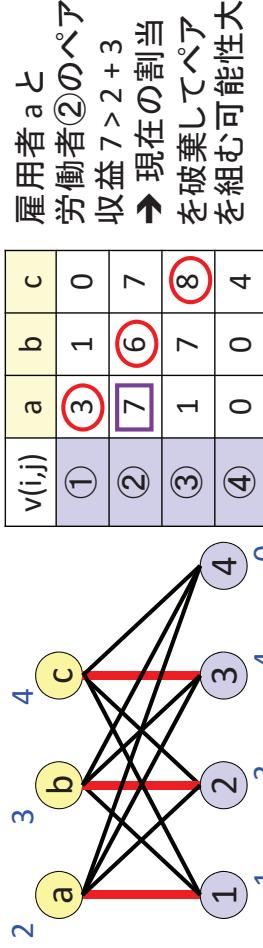
皆が満足するように(不満をもたないように), 以下を決めたい:

• 労働者の仕事への割当

• 雇用者・労働者への収益の配分

不満のない仕事の割当と収益の配分

「ゲーム理論における
「協力ゲーム」の一種



- $q(i) = \text{仕事 } i \text{ の雇用者の取り分 } (\geq 0)$
- $p(j) = \text{労働者 } j \text{ の取り分 } (\geq 0)$
- $\text{労働者 } j \text{ が仕事 } i \text{ に従事} \rightarrow q(i) + p(j) = v(i,j)$

命題:
任意の雇用者 i, 労働者 j に対し, $q(i) + p(j) \geq v(i,j)$

証明: 最大重みマッチングと双対最適解を比べば良い.

不満のない仕事の割当と収益の配分

雇用者 a と
労働者 ② のペア
収益 $7 > 2 + 3$
→ 現在の割当
を破棄してペア
を組む可能性大

$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

