

# 数理経済学特講

## 複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

---

### 第4回 二部グラフにおける 片側被覆制約つきマッチング 最大重みマッチング

塩浦昭義

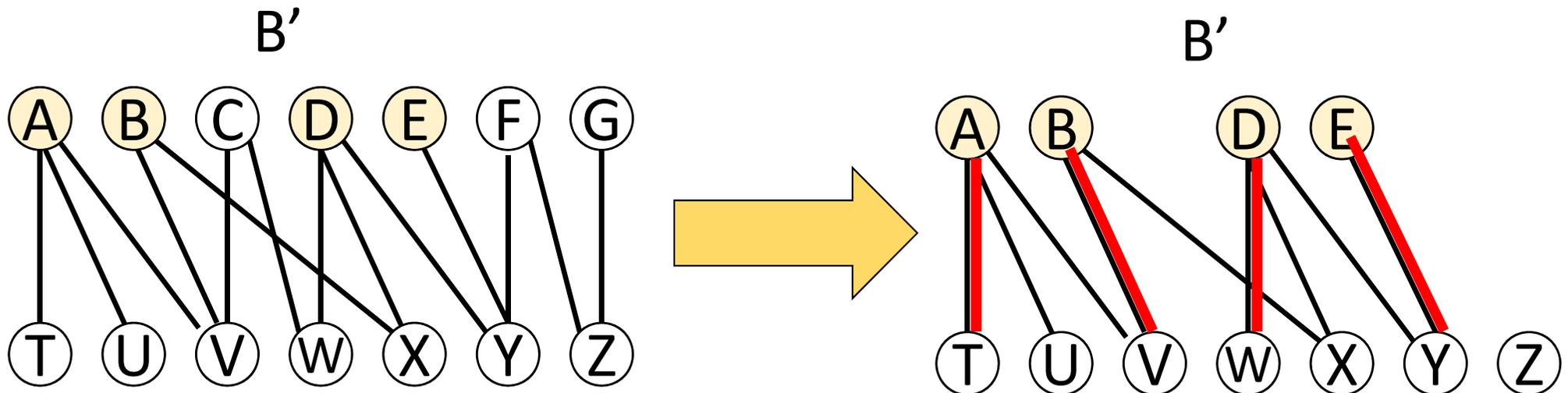
東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

# 片側被覆制約つきマッチングの 求め方

# 制約つきマッチングから最大マッチングへ

- $B' \subseteq B$  をカバーするマッチングを求めたい
  - $B'$  の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチングを求めればよい
  - 最大マッチング問題に帰着する
- (1) 上側頂点集合  $B$  に含まれる頂点のうち,  $B-B'$  の頂点を削除.  
それらに接続する枝も削除.
- (2) 得られたグラフの最大マッチングを求める
  - ←  $B'$  の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチング

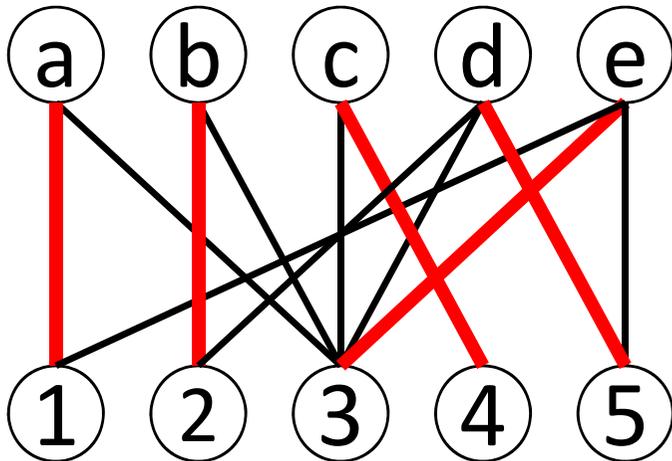


# ホールの定理

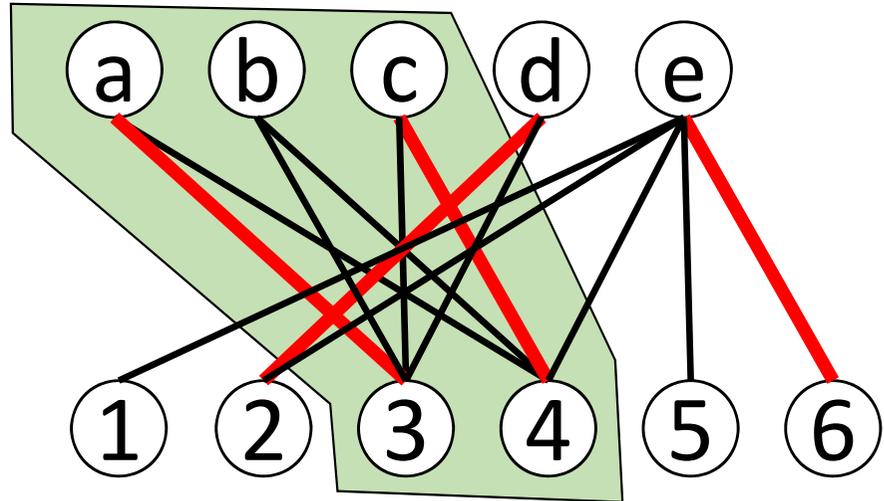
# 指定頂点集合をカバーするマッチング： 存在するための必要条件

所与の  $B' \subseteq B$  をカバーするマッチングは存在するか？

$B' = \{a, b, c, d, e\}$  をカバー可能



$B' = \{a, b, c, d, e\}$  をカバー可能？



## 命題

ある  $X \subseteq B'$  に対し,

$X$  の隣接頂点の数  $< |X|$

→  $B'$  すべてをカバーする

マッチングは存在しない

$a, b, c$  の隣接頂点 =  $\{3, 4\}$

∴  $a, b, c$  のうち, 高々2つしか  
カバーできない

→  $B'$  はカバーできない

# 指定頂点集合をカバーするマッチング： 存在するための必要十分条件

**命題** ある  $X \subseteq B'$  に対し,  $X$  の隣接頂点の数  $< |X|$   
 $\rightarrow B'$  すべてをカバーするマッチングは存在しない  
 (対偶:  $B'$  すべてをカバーするマッチングが存在  
 $\rightarrow$  任意の  $X \subseteq B'$  に対し,  $X$  の隣接頂点の数  $\geq |X|$ )

逆も成り立つ

**定理 (Hall (ホール) の定理)**

$B'$  すべてをカバーするマッチングが存在

$\leftrightarrow$  任意の  $X \subseteq B'$  に対し,  $X$  の隣接頂点の数  $\geq |X|$

指定する頂点をカバーするマッチングが存在しない場合にも,  
その証拠が得られる

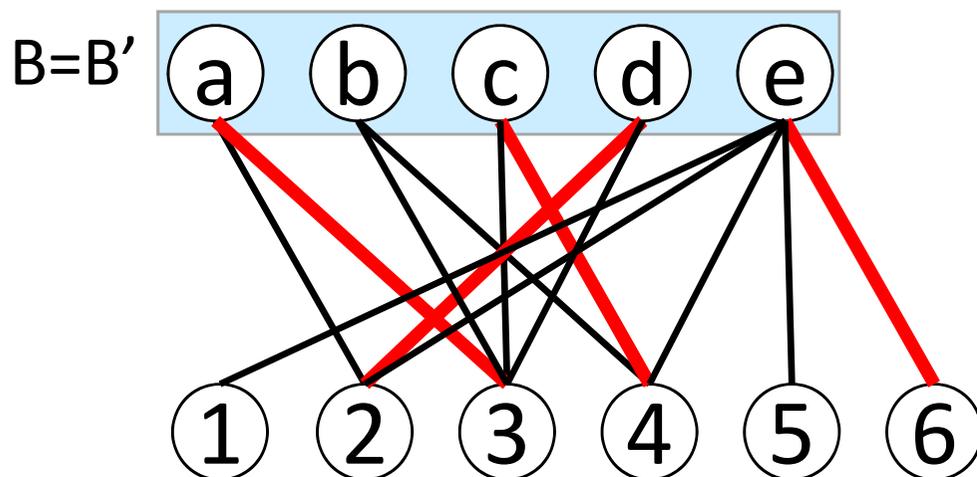
# ホールの定理：証明

[←] 対偶「 $B'$  すべてをカバーするマッチングは存在しない

→ ある  $X \subseteq B'$  に対し、 $|X| > X$  に隣接する頂点の数」を証明  
以降では、 $B=B'$  と仮定しても良い

( $\because B-B'$  に含まれる頂点およびそれらに接続する枝は無関係)

- $M$ : マッチング, **カバーする  $B'$  の頂点数が最大**とする
- $S \subseteq B'$ : マッチング枝が接続していない  $B'$  の頂点集合



# ホールルの定理：証明のつづき

$M$ のカバーする  $B'$  の頂点数は最大

→  $S$  の頂点から始まる,  $M$ に関する**増加路**は存在しない

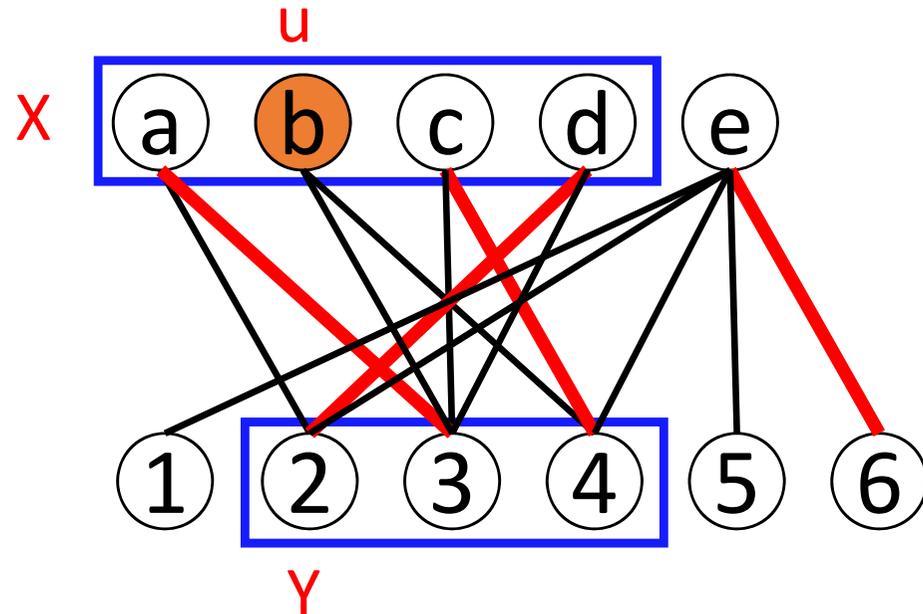
( $\because$  存在する → カバーできる  $B'$  の頂点数が増える)

仮定より,  $S$  は非空 →  $u \in S$  とする.

$X$ :  $u$  から交互路で到達可能な  $B'$  の頂点の集合

$Y$ :  $X$  の隣接頂点の集合

以降では,  $|Y| < |X|$  を示す.



# ホールルの定理：証明のつづき

$|Y| < |X|$  を示すための準備:

「任意の  $v \in Y$  に対し,

ある  $t \in X - \{u\}$  が存在して,

$(t, v)$  はマッチングの枝」を示す.

$Y$  の定義より,  $v \in Y$  はある  $r \in X$  に隣接

$(r, v)$  がマッチング枝のとき:  $u$  の選び方より  $u \neq r \therefore r \in X - \{u\}$

$(r, v)$  がマッチング枝ではないとき:

$r$  は  $u$  から, ある交互路  $P$  で到達可能な頂点.

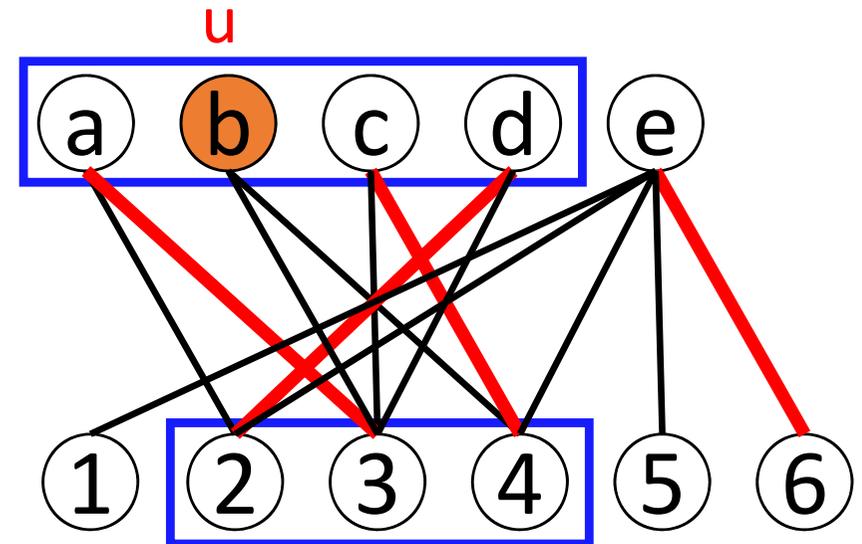
とくに,  $P$  の最後の枝はマッチング枝.

もし  $v$  にマッチング枝が接続しないと仮定  $\rightarrow P \cup \{(r, v)\}$  は増加路

$\rightarrow$  マッチングでカバーできる  $B'$  の頂点数を増やすことが可能(矛盾)

$(t, v)$ :  $v$  に接続するマッチング枝

とすると,  $P \cup \{(r, v), (t, v)\}$  は  $u$  から  $t$  への交互路  $\therefore t \in X - \{u\}$



# ホールの定理：証明のつづき

「任意の  $v \in Y$  に対し、  
ある  $t \in X - \{u\}$  が存在して、  
( $t, v$ ) はマッチングの枝」を使って

$|Y| < |X|$  を示す.

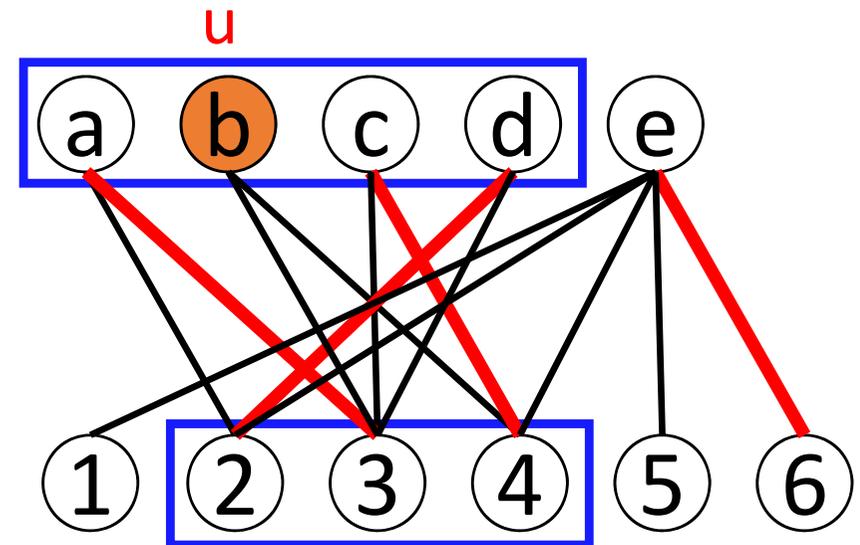
$Y$  の各頂点  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, |Y|$ ) に対し、  
 $v_i$  とマッチング枝でつながる

$X - \{u\}$  の頂点を  $t_i$  とおく.

マッチング枝は同じ頂点には接続しない  $\therefore t_i$  はすべて異なる

$\therefore X - \{u\}$  の頂点数  $\geq Y$  の頂点数

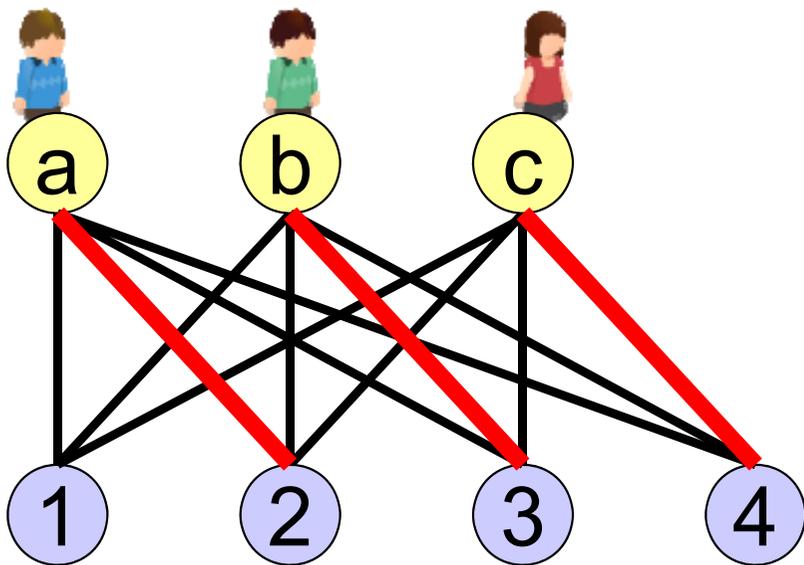
$\therefore |X| > |Y|$ . ■



# 最大重みマッチング問題

# 最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値  $v(i,j)$  が与えられている状況で入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:**

枝に重みを与えられたグラフにおいて,

枝重みの和が最大のマッチングを求める

# 最大重みkマッチング問題の定義

## 最大重みkマッチング問題

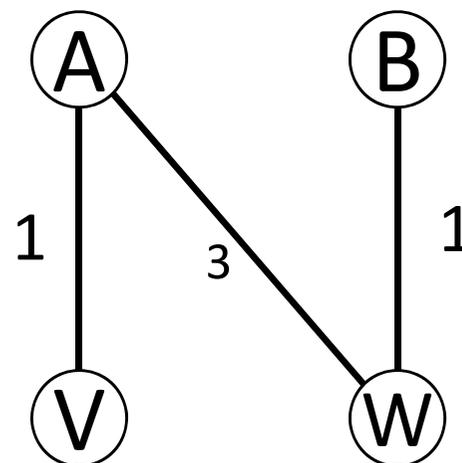
- **入力:** 二部グラフ  $G=(V,E)$  (頂点集合  $V$ , 枝集合  $E$ ),  
各枝  $(u,v)$  の重み  $w(u,v)$   
正整数  $k$
- **出力:** 枝数= $k$  のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの  
(最大重みkマッチング)

例: 最大重み1マッチングは

$\{(A,W)\}$ , 重み3

最大重み2マッチングは

$\{(A,V), (B,W)\}$ , 重み2



# 最大重みマッチング問題の読み替え

- 入札者 → ある仕事の雇用者
  - 財 → 労働者
  - 評価値  $v(i,j)$  → 仕事  $i$  に労働者  $j$  を割り当てたときの収益
- ※ 各仕事に従事できる労働者は高々ひとり  
各労働者が従事できる仕事は高々ひとつ
- **最大重みマッチング問題**: 雇用者と労働者の仲介役の問題  
総収益が最大となるような, 労働者の仕事への割当を求める

# 最大重みマッチングの双対問題

仲介役の別の仕事:

労働者の仕事への割当てで得た収益をうまく配分

- $q(i)$  = 仕事  $i$  の雇用者の取り分 ( $\geq 0$ )
- $p(j)$  = 労働者  $j$  の取り分 ( $\geq 0$ )
- 労働者  $j$  が仕事  $i$  に従事  $\rightarrow$  収益  $v(i,j)$

$q(i) + p(j) < v(i,j)$  成立

$\rightarrow$  労働者  $j$  と雇用者  $i$  は単独で契約を結ぶ

$\therefore q(i) + p(j) \geq v(i,j)$  を満たす必要あり

仲介役の解くべき問題:

全労働者および全雇用者が不満をもつことなく,  
配分するお金の総額を最小に  $\leftarrow$  双対問題

# 双対問題の定式化

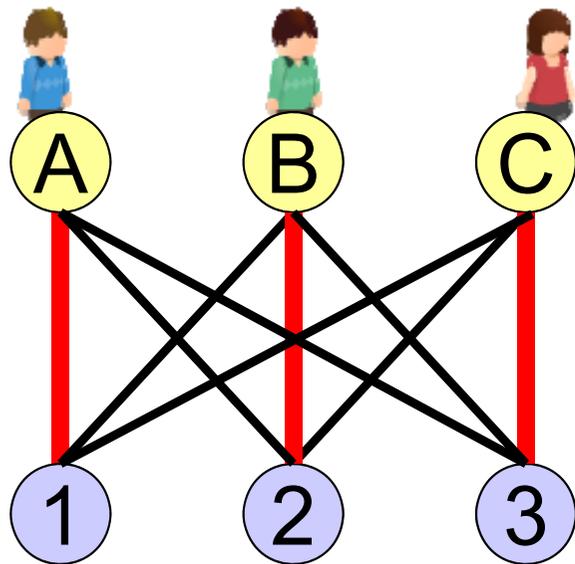
最小化  $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件  $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$$

$$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

# オークションと最大重みマッチング問題の関係



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

二部グラフを次のように定義

- 頂点集合  $V = B \cup N$
- 枝集合  $E = B \times N \quad (= \{(i,j) \mid i \in B, j \in N\})$
- 各枝  $(i,j)$  の重み  $= v(i,j)$

→ 最大重みマッチング問題が得られる

財の配分と二部グラフのマッチングは1対1対応

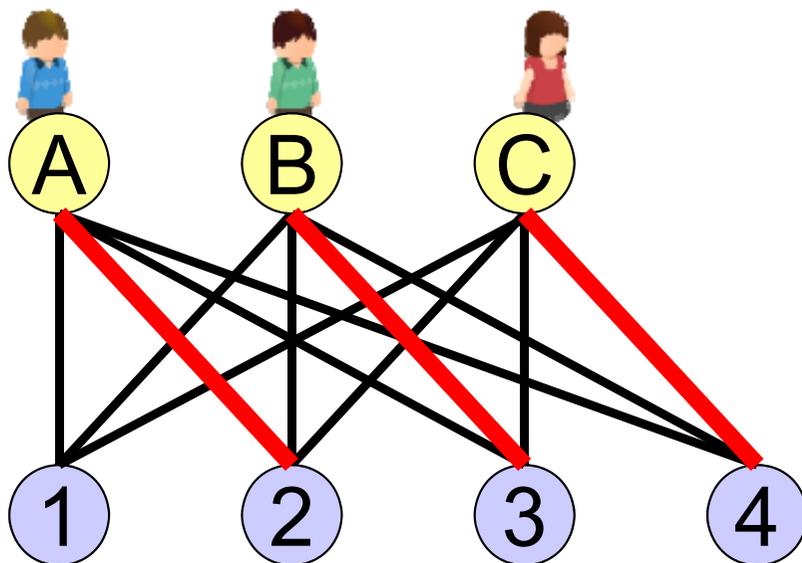
- 配分  $\alpha(i)$  に対応するマッチング  $M = \{(i, \alpha(i)) \mid i \in B, \alpha(i) \neq 0\}$

# 均衡配分と最大重みマッチングの関係

オークションの均衡配分 = 最大重みマッチング

定理:  $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$  は均衡配分

$\leftrightarrow$   $\alpha^*(i)$  に対応するマッチングは最大重み

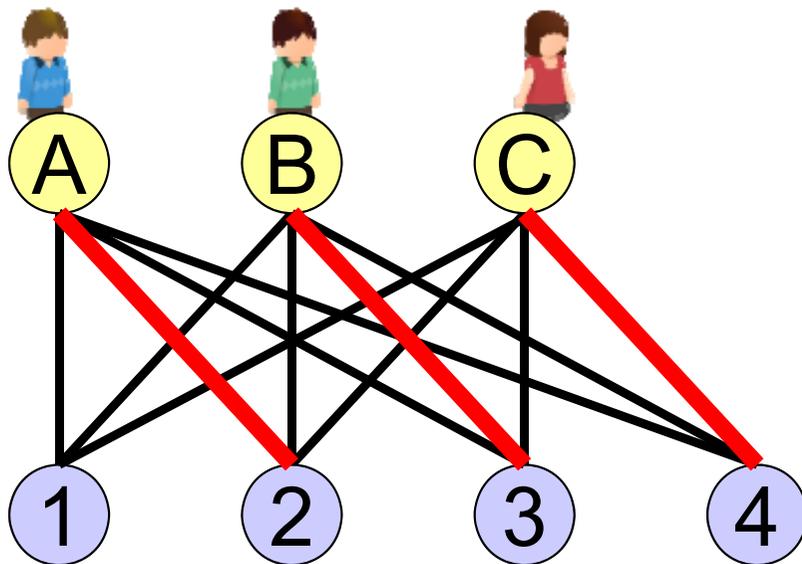


$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

# 均衡価格と最大重みマッチングの双対問題の関係

定理：オークションの均衡価格  $\leftrightarrow$  双対問題の最適解

$$q(i) = 4 \quad 3 \quad 4$$



$$p(j) = 0 \quad 3 \quad 4 \quad 0$$

均衡価格

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

# 演習問題

問1: 下記のように評価値と財の価格(赤い数字)が与えられたとき, 均衡価格か否か判定したい.

(1) (i), (ii), (iii) それぞれに対し, 判定のための二部グラフを書け.

また, 頂点集合  $B'$ ,  $N'$  を明記せよ.

(2) 頂点集合  $B' \cup N'$  を同時にカバーするマッチングが存在するか否か, 調べよ. 存在する場合は具体的に求めること. 存在しない場合はその理由を述べよ.

(i)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

3  
6

(ii)

$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8

1  
5  
6

(iii)

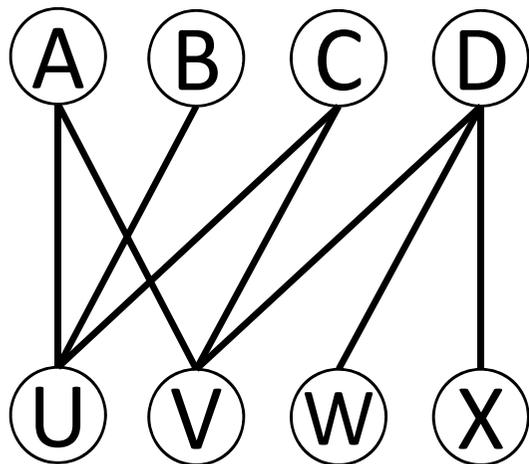
$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

0  
5  
6  
0

# 演習問題

問2: 以下の二部グラフでは, 頂点集合  $R$  をカバーする  
マッチングが存在しない.  
ホールの定理に基づき, その証拠を示せ.

(1)  $R = \{A, B, C, D\}$



(2)  $R = \{A, B, C, D, E\}$

