

数理経済学特講

複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

第4回 二部グラフにおける 片側被覆制約つきマッチング 最大重みマッチング

塩浦昭義

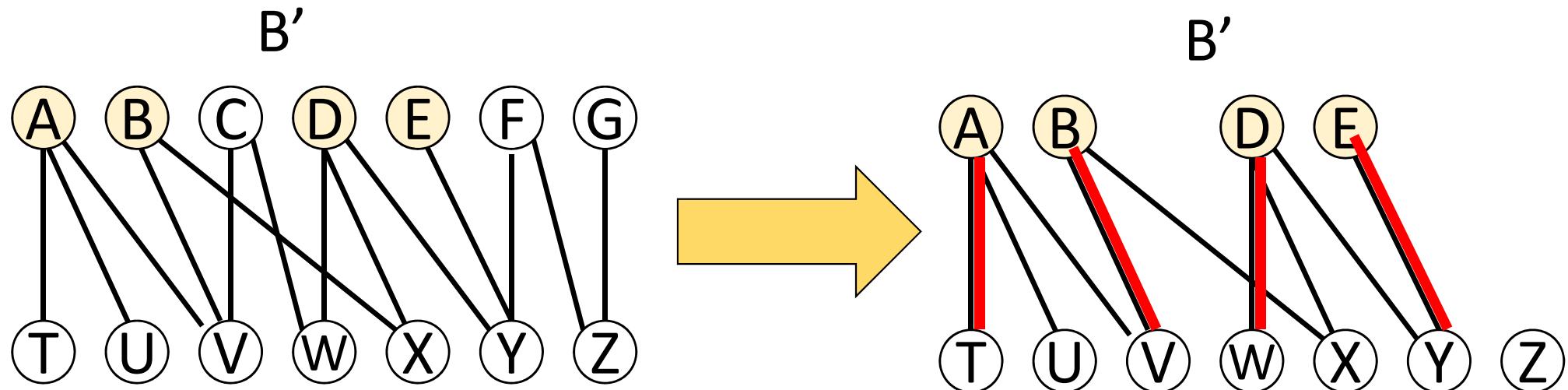
東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

片側被覆制約つきマッチングの 求め方

制約つきマッチングから最大マッチングへ

- $B' \subseteq B$ をカバーするマッチングを求めたい
 → B' の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチングを求めるべき
 → 最大マッチング問題に帰着する
- (1) 上側頂点集合 B に含まれる頂点のうち, $B-B'$ の頂点を削除.
 それらに接続する枝も削除.
- (2) 得られたグラフの最大マッチングを求める
 ← B' の頂点を出来るだけ多くカバーするマッチング

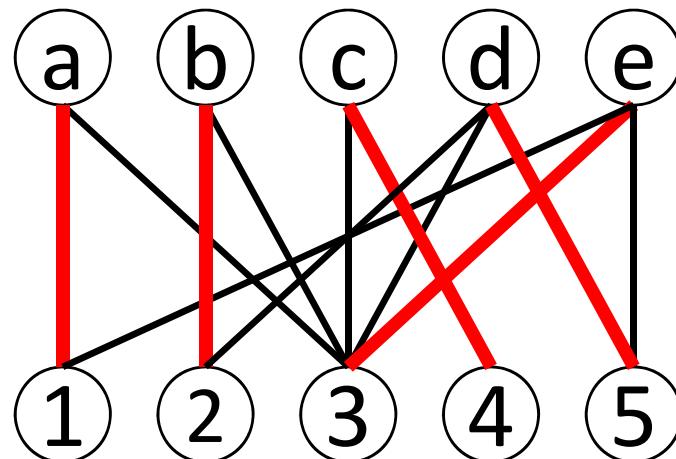


ホールの定理

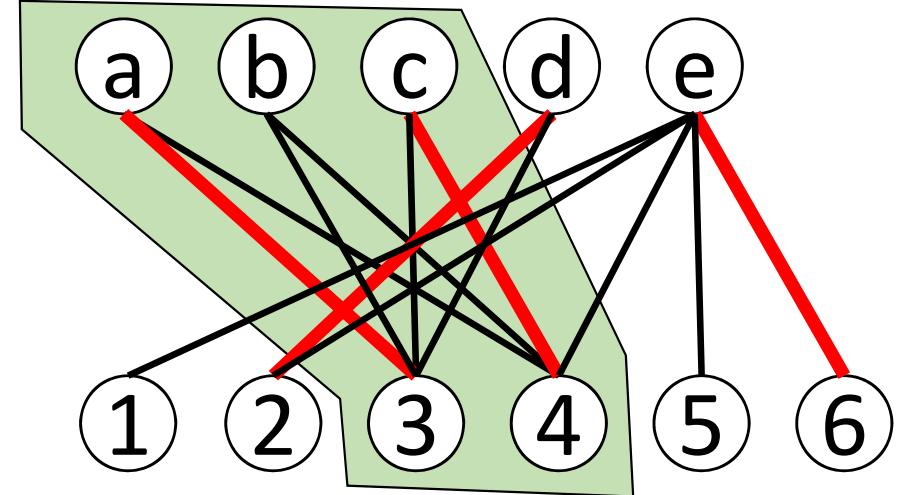
指定頂点集合をカバーするマッチング： 存在するための必要条件

所与の $B' \subseteq B$ をカバーするマッチングは存在するか？

$B'=\{a,b,c,d,e\}$ をカバー可能



$B'=\{a,b,c,d,e\}$ をカバー可能？



命題

ある $X \subseteq B'$ に対し、

X の隣接頂点の数 $< |X|$

→ B' すべてをカバーする
マッチングは存在しない

a, b, c の隣接頂点 = $\{3, 4\}$

$\therefore a, b, c$ のうち、高々 2 つしか
カバーできない

→ B' はカバーできない

指定頂点集合をカバーするマッチング： 存在するための必要十分条件

命題 ある $X \subseteq B'$ に対し、 X の隣接頂点の数 $< |X|$

→ B' すべてをカバーするマッチングは存在しない

(対偶： B' すべてをカバーするマッチングが存在

→ 任意の $X \subseteq B'$ に対し、 X の隣接頂点の数 $\geq |X|$

逆も成り立つ

定理 (Hall (ホール) の定理)

B' すべてをカバーするマッチングが存在

↔ 任意の $X \subseteq B'$ に対し、 X の隣接頂点の数 $\geq |X|$

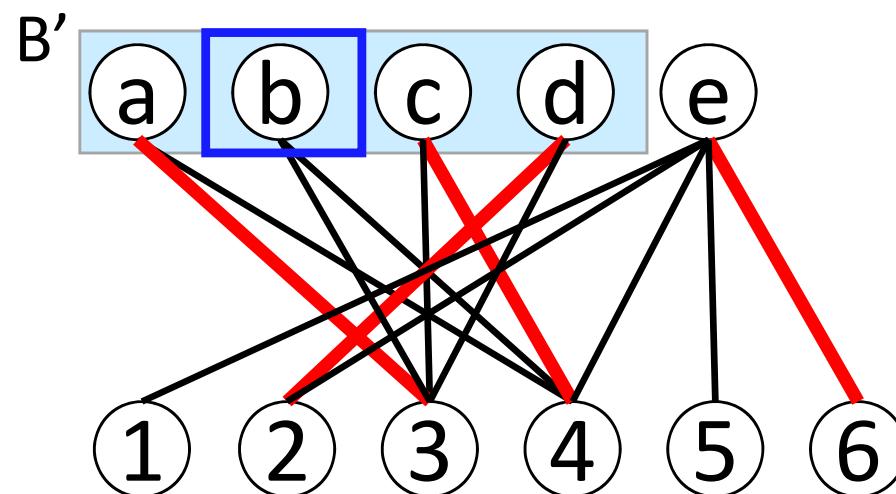
指定する頂点をカバーするマッチングが存在しない場合にも、
その証拠が得られる

ホールの定理: 証明

[\leftarrow] 対偶「 B' すべてをカバーするマッチングは存在しない

\rightarrow ある $X \subseteq B'$ に対し, $|X| > |X|$ に隣接する頂点の数」を証明

- M : マッチング, カバーする B' の頂点数が最大とする
- $S \subseteq B'$: マッチング枝が接続していない B' の頂点集合



ホールの定理: 証明のつづき

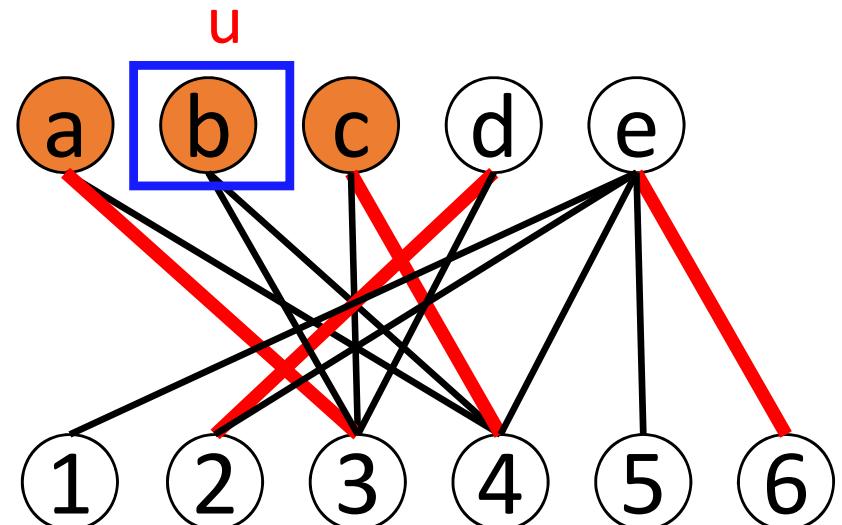
M のカバーする B' の頂点数は最大

→ S の頂点から始まる, M に関する増加路は存在しない
 $(\because \text{存在する} \rightarrow \text{カバーできる } B' \text{ の頂点数が増える})$

仮定より, S は非空 → $u \in S$ とする.

$X \subseteq B'$: u から交互路で到達可能な B' の頂点

以降では, X の隣接頂点の数 $< |X|$ を示す.



ホールの定理: 証明のつづき

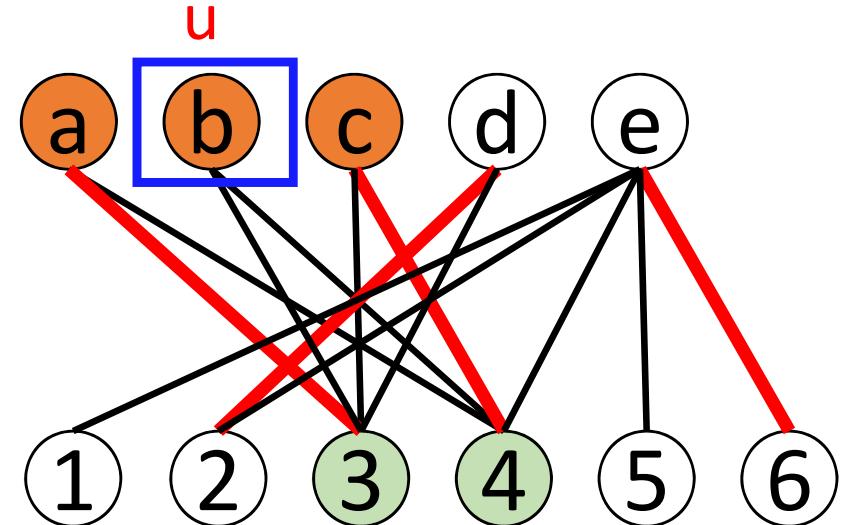
「 X の隣接頂点の数 $< |X|$ 」の証明

定義より, $X - \{u\}$ の各頂点には
マッチングの枝が接続

$Y \subseteq N$: マッチングにおける $X - \{u\}$ の
各頂点の「相手」の集合

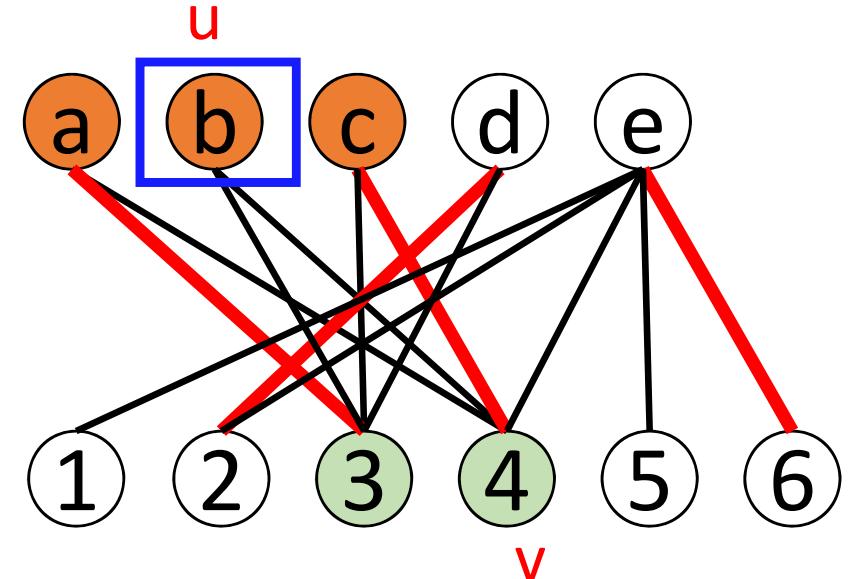
→ $|Y| < |X|$

以下では, $Y = 「X の隣接頂点」$ を示す.



ホールの定理: 証明のつづき

「 $Y = X$ の隣接頂点」の証明



$Y = X - \{u\}$ のマッチングの相手 $\therefore Y \subseteq X$ の隣接頂点

次に, X の任意の隣接頂点 v が $v \in Y$ を満たすことを証明

v にはマッチングの枝が接続している

(\because 接続していない $\rightarrow u$ から v への増加路が存在(矛盾))

マッチングにおける v の相手 $\in X - \{u\}$ $\therefore v \in Y$

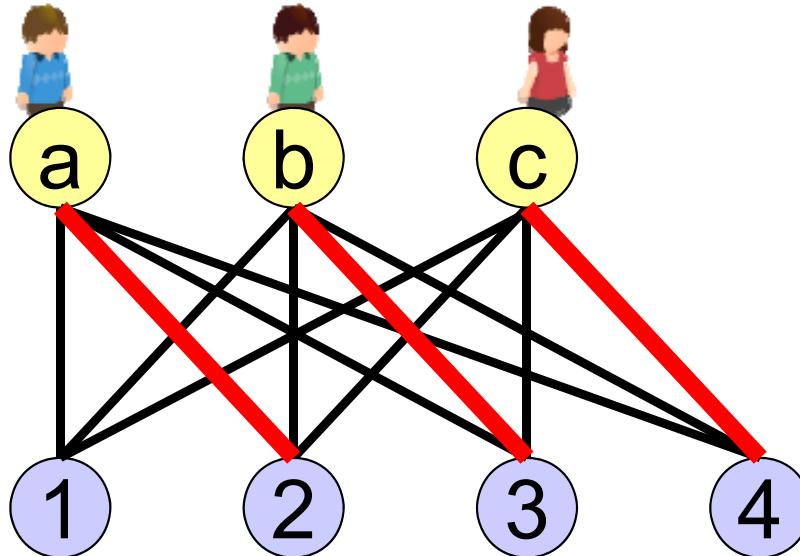
($\because v$ の相手 $\notin X - \{u\} \rightarrow v$ の相手に到達する u からの交互路が存在
 $\rightarrow v$ の相手 $\in X$ (矛盾))

証明終わり

最大重みマッチング問題

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 $v(i,j)$ が与えられている状況で
入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:
枝に重みが与えられたグラフにおいて,
枝重みの和が最大のマッチングを求める

最大重みkマッチング問題の定義

最大重みkマッチング問題

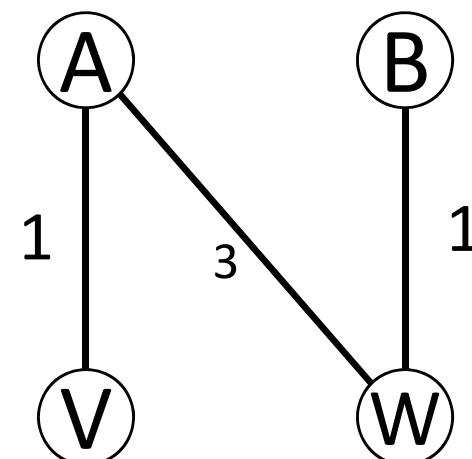
- 入力: 二部グラフ $G=(V,E)$ (頂点集合 V , 枝集合 E),
各枝 (u,v) の重み $w(u,v)$
正整数 k
- 出力: 枝数 = k のマッチングの中で枝重みの和が最大のもの
(最大重み k マッチング)

例: 最大重み1マッチングは

$\{(A,W)\}$, 重み3

最大重み2マッチングは

$\{(A,V), (B, W)\}$, 重み2



最大重みマッチング問題の読み替え

- ・入札者 → ある仕事の雇用者
 - ・財 → 労働者
 - ・評価値 $v(i,j)$ → 仕事 i に労働者 j を割り当てたときの収益
- ※ 各仕事に従事できる労働者は高々ひとり
各労働者が従事できる仕事は高々ひとつ
- ・**最大重みマッチング問題**: 雇用者と労働者の仲介役の問題
総収益が最大となるような、労働者の仕事への割当を求める

最大重みマッチングの双対問題

仲介役の別の仕事：

労働者の仕事への割当て得た収益をうまく配分

- $q(i) = \text{仕事 } i \text{ の雇用者の取り分 } (\geq 0)$
- $p(j) = \text{労働者 } j \text{ の取り分 } (\geq 0)$
- 労働者 j が仕事 i に従事 \rightarrow 収益 $v(i,j)$

$q(i) + p(j) < v(i,j)$ 成立

→労働者 j と雇用者 i は単独で契約を結ぶ

$\therefore q(i) + p(j) \geq v(i,j)$ を満たす必要あり

仲介役の解くべき問題：

全労働者および全雇用者が不満をもつことなく、
分配するお金の総額を最小に ← 双対問題

双対問題の定式化

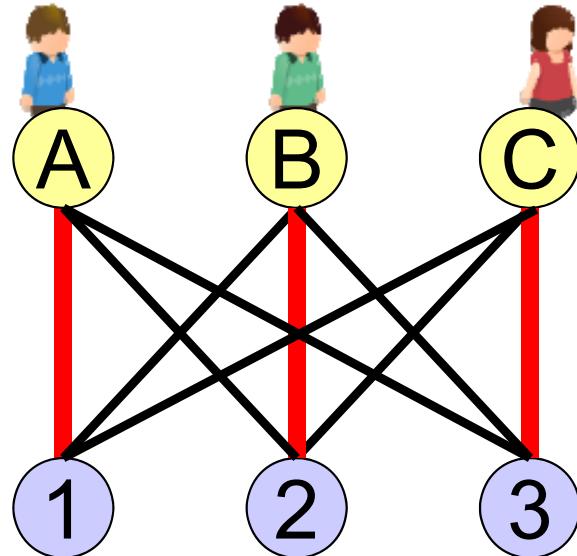
最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

オークションと最大重みマッチング問題の関係



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

二部グラフを次のように定義

- 頂点集合 $V = B \cup N$
- 枝集合 $E = B \times N$ ($= \{(i, j) \mid i \in B, j \in N\}$)
- 各枝 (i,j) の重み $= v(i,j)$

→ 最大重みマッチング問題が得られる

財の配分と二部グラフのマッチングは1対1対応

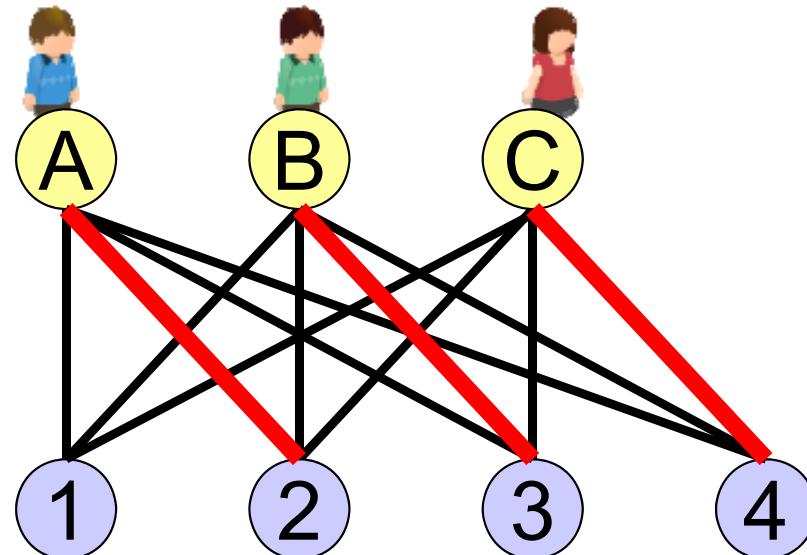
- 配分 $\alpha(i)$ に対応するマッチング $M = \{(i, \alpha(i)) \mid i \in B, \alpha(i) \neq 0\}$

均衡配分と最大重みマッチングの関係

オークションの均衡配分 = 最大重みマッチング

定理: $\alpha^*(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分

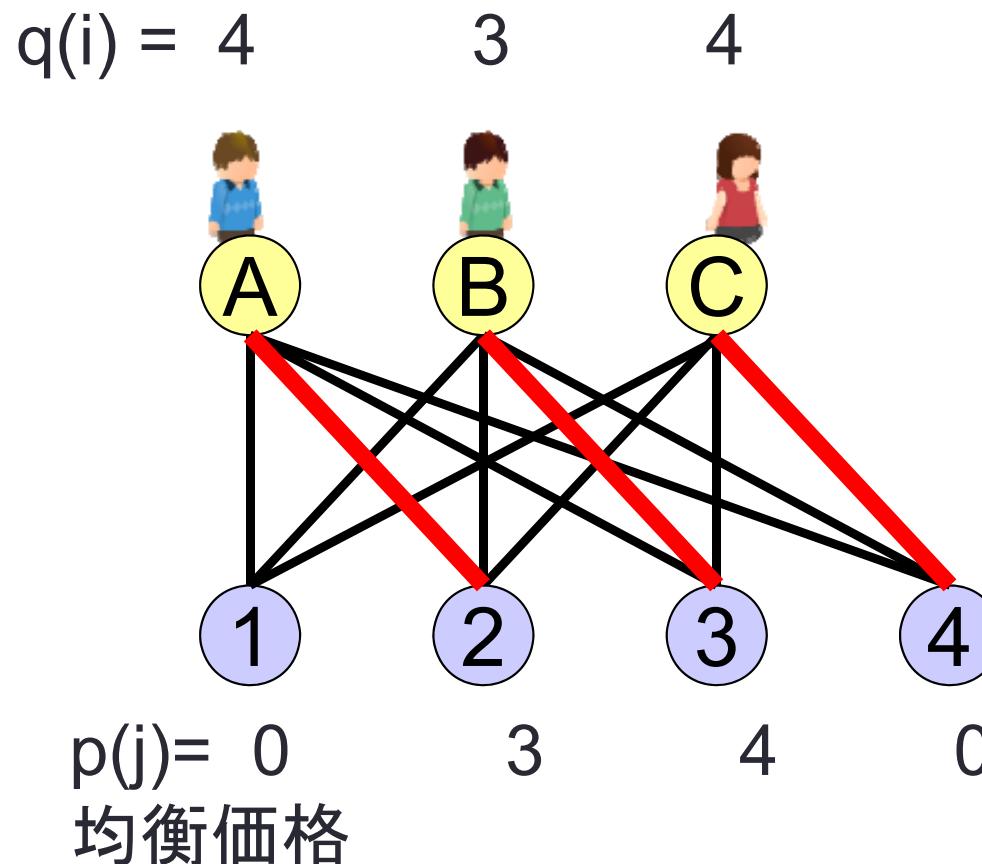
$\leftrightarrow \alpha^*(i)$ に対応するマッチングは最大重み



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

均衡価格と最大重みマッチングの双対問題の関係

定理：オークションの均衡価格 \leftrightarrow 双対問題の最適解



$v(i,j)$	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

演習問題

問1: 下記のように評価値と財の価格(赤い数字)が与えられたとき、均衡価格か否か判定したい。

(1) (i), (ii), (iii) それぞれに対し、判定のための二部グラフを書け。

また、頂点集合 B' , N' を明記せよ。

(2) 頂点集合 $B' \cup N'$ を同時にカバーするマッチングが存在するか否か、調べよ。
存在する場合は具体的に求めること。存在しない場合はその理由を述べよ。

(i)

$v(i,j)$	A	B	C
3 ①	2	3	6
6 ②	6	7	7

(ii)

$v(i,j)$	A	B	C
1 ①	3	1	0
5 ②	7	6	7
6 ③	1	7	8

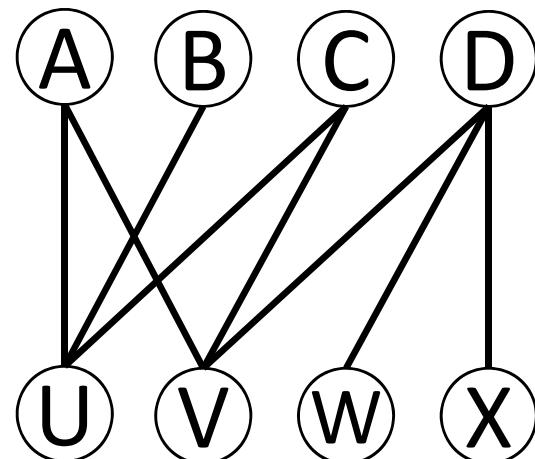
(iii)

$v(i,j)$	A	B	C
0 ①	3	1	0
5 ②	7	6	7
6 ③	1	7	8
0 ④	0	0	4

演習問題

問2：以下の二部グラフでは、頂点集合 R をカバーするマッチングが存在しない。
ホールの定理に基づき、その証拠を示せ。

(1) $R=\{A, B, C, D\}$



(2) $R=\{A, B, C, D, E\}$

