数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

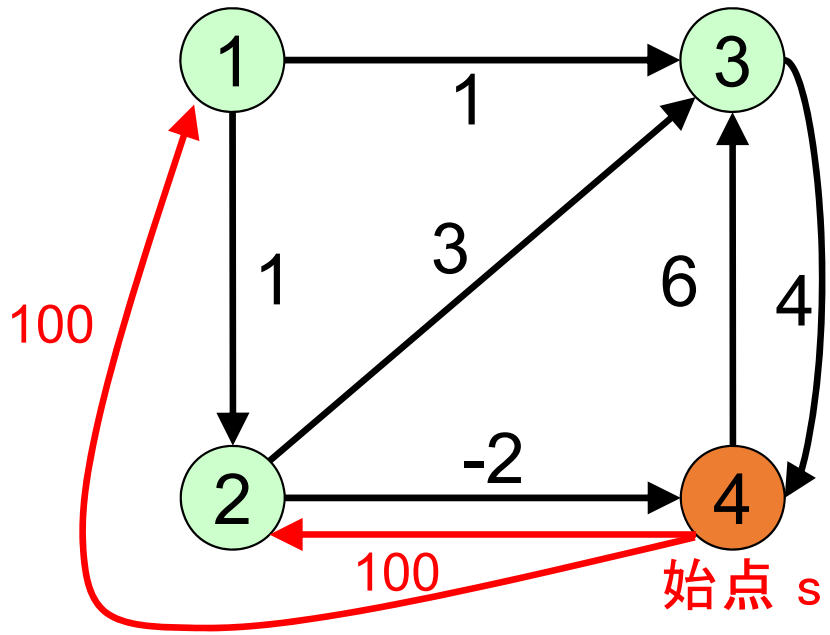
第7回　最大重みマッチングの相補性定理

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

変数の差の不等式系の解を求める

ケース1：全ての制約に2つの変数が現れる場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$



差分不等式系の解
＝以下のグラフのポテンシャル

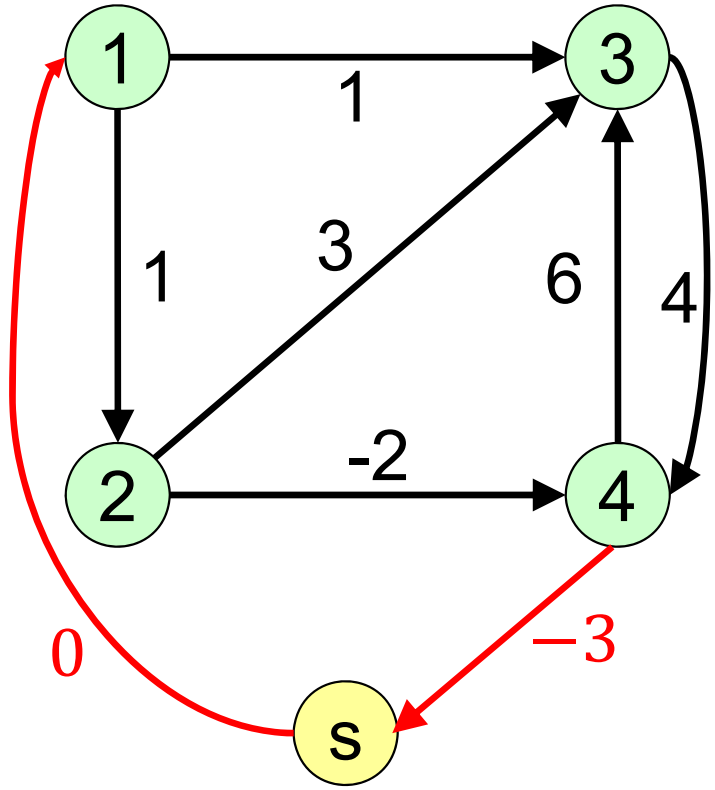
- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約$p_v - p_u \leq \alpha$に対し，
  長さ$= \alpha$の枝(u, v)を追加
- 適当な頂点を始点 s とおき，s から各頂点への最短路長を計算
  - 負閉路が存在する➔解なし
  - 負閉路が存在しない➔最短路長d(v)は解

※注意：頂点 s からある頂点 u への路が存在しない場合，
長さの十分大きい枝 (s, u) を追加

変数の差の不等式系の解を求める

ケース2：変数1つの制約を含む場合

$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$
$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$
$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6,$ $p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$



ケース1からの修正点：

(1)変数2つの制約に変換する

- 新しい変数 p_s を追加（頂点 s 追加）
- 各変数$p_1, \ldots, p_n$に対し，
  - $p_v \leq \beta$の形の制約が存在
    ➔$p_v - p_s \leq \beta$ に置き換え（長さβの枝(s,v)追加）
  - $p_v \geq \gamma$の形の制約が存在
    ➔$p_s - p_v \leq -\gamma$ に置き換え（長さ$-\gamma$の枝(v,s)追加）

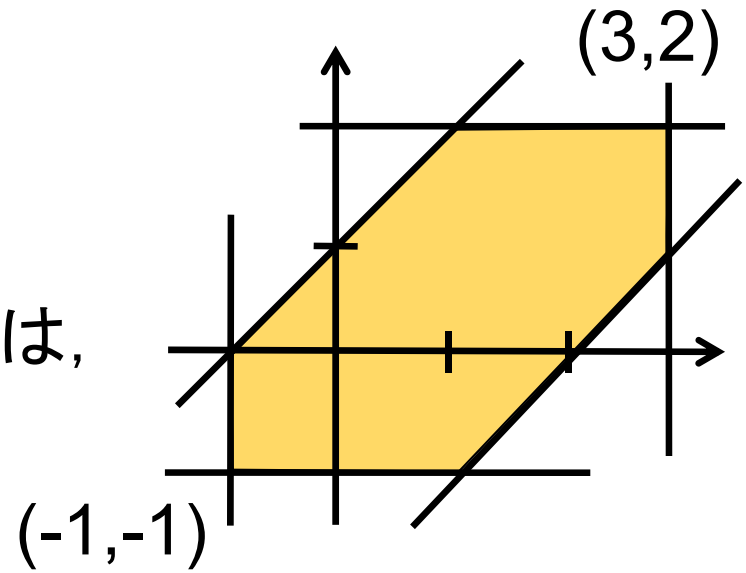
(2) s を始点として，各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しないならば，p(s)=0となるのでうまくいく

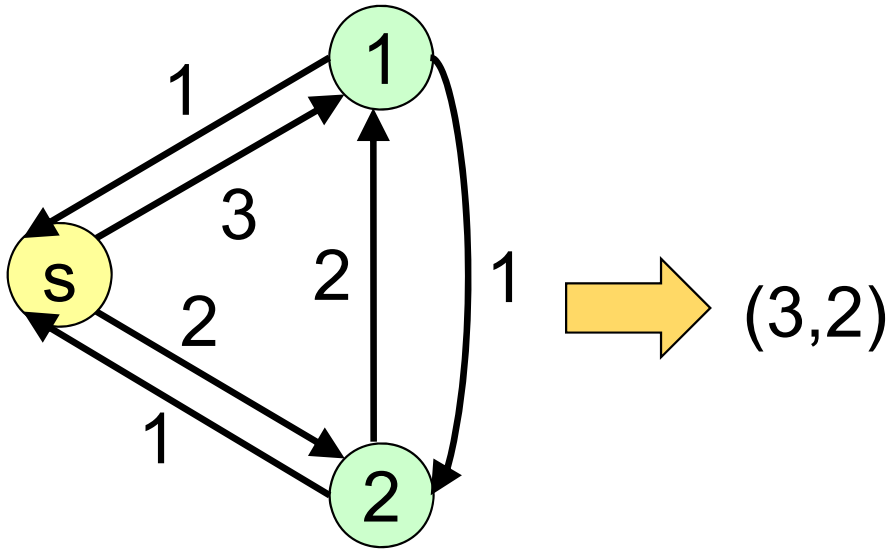
極大解・極小解の求め方（1）

- 差分不等式系に極小解・極大解が存在する場合，それらは唯一

$$p_2 - p_1 \leq 1,\ \ p_1 - p_2 \leq 2,$$
$$-1 \leq p_1 \leq 3,\ \ -1 \leq p_2 \leq 2$$



- 直前のスライドで示したグラフの最短路長は，差分不等式系の極大解

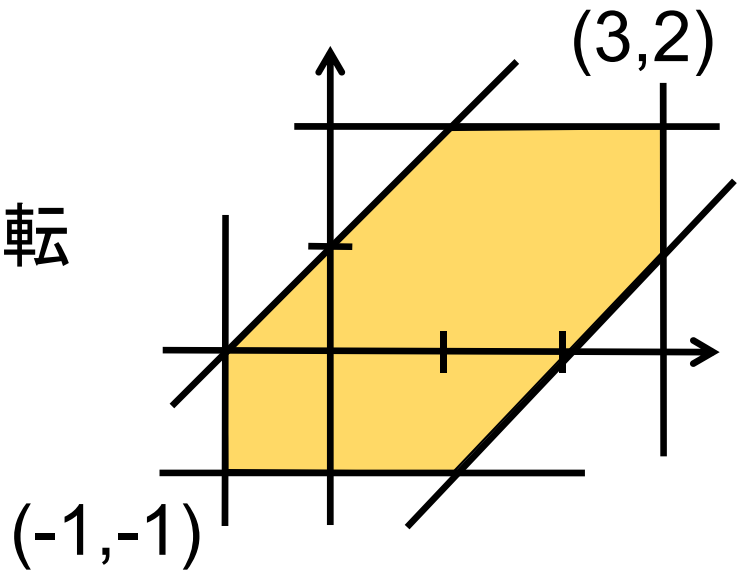


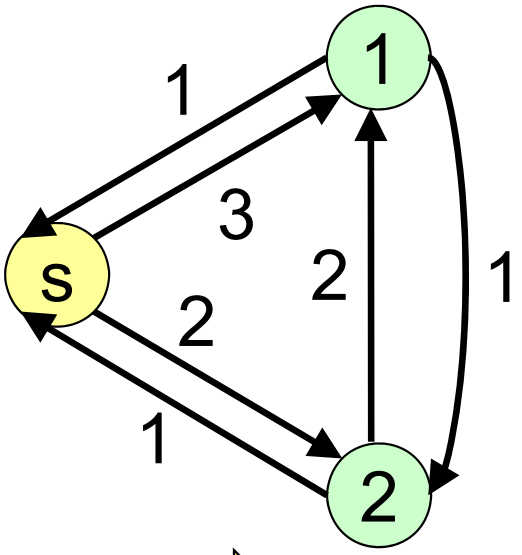
極大解･極小解の求め方(2)

極小解の求め方

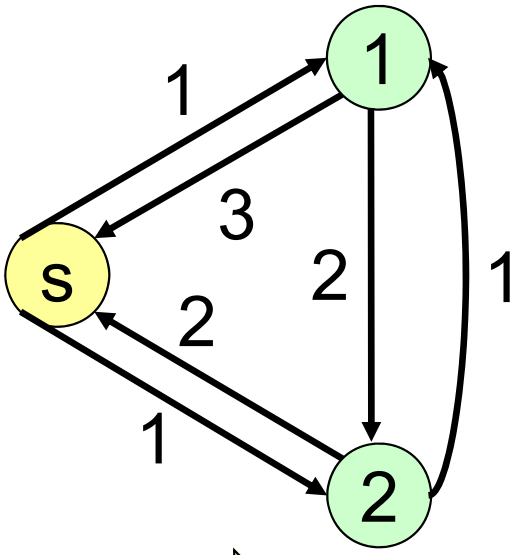
- 枝の向きを逆に，枝の長さはそのまま
- 最短路長を計算➔ 得られた解の符号を反転

➔ 差分不等式系の極小解





(3,2)



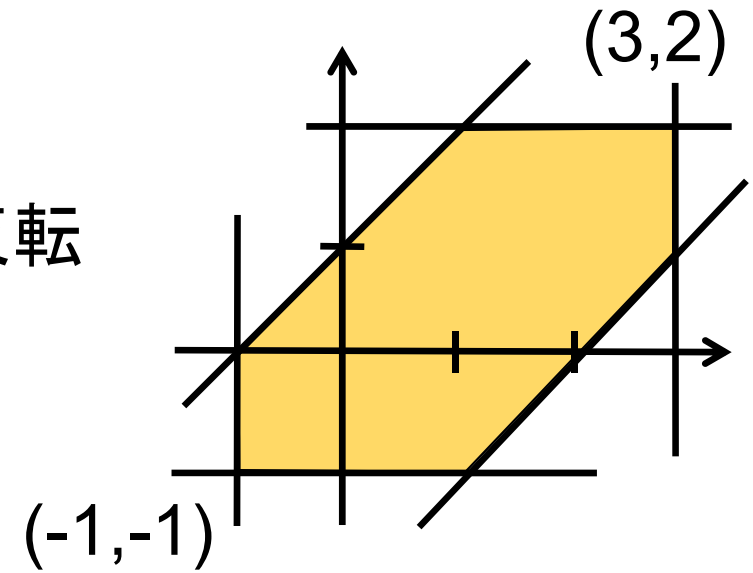
(1,1) (-1,-1)

極大解･極小解の求め方（3）

極小解の求め方

- 枝の向きを逆に，枝の長さはそのまま
- 最短路長を計算➔ 得られた解の符号を反転

➔ 差分不等式系の極小解



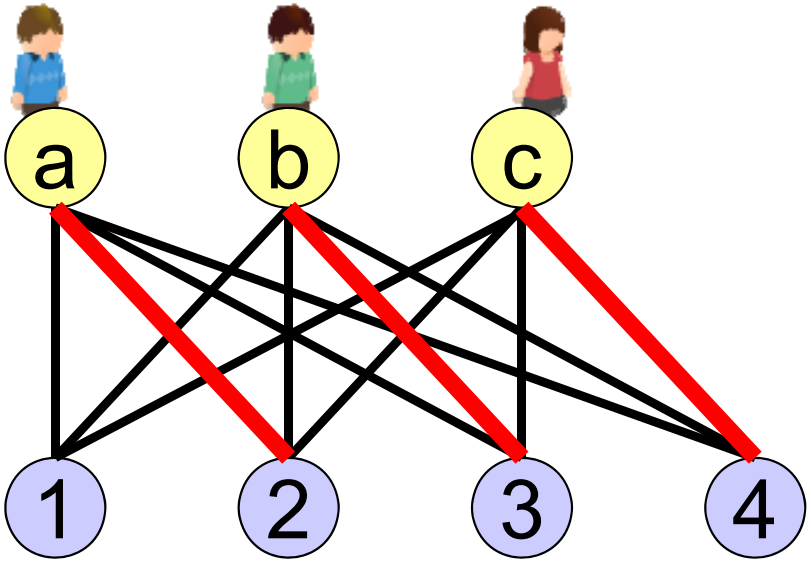
考え方

- $(p_1, \ldots, p_n)$ に関する極小解⬅➔ $(q_1, \ldots, q_n) = (-p_1, \ldots, -p_n)$ に関する極大解
- 差分不等式系の変数 $p_1, \ldots, p_n$ を $-q_1, \ldots, -q_n$ に置き換え，得られた差分不等式系に対応するグラフを作る ➔ 前述のグラフ
- 得られた解は $(q_1, \ldots, q_n)$に関する極大解

➔符号を反転すると，$(p_1, \ldots, p_n)$ に関する極小解

最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値 v(i,j)が与えられている状況で
  入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:
  枝に重みが与えられたグラフにおいて,
  枝重みの和が最大のマッチングを求める

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

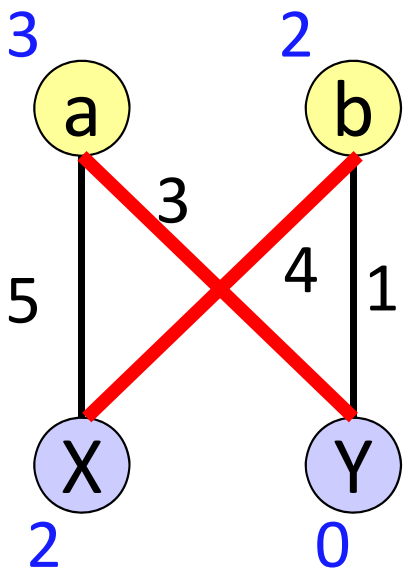
$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

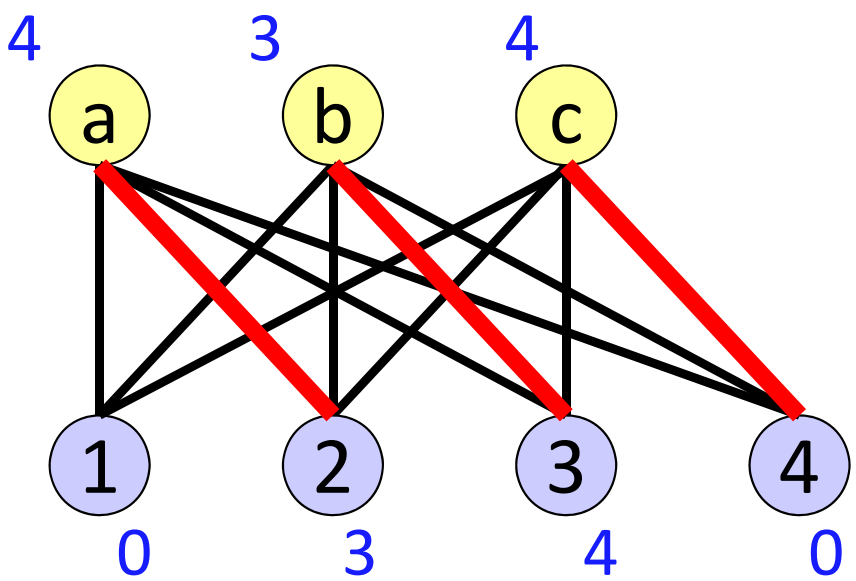
$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

最大重みマッチングの最適性条件

双対問題の実行可能解を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
←→ 双対問題の実行可能解(q,p)で,
次の条件を満たすものが存在:
マッチング M に含まれる任意の枝に対し, q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない → q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない → p(j)=0





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

⑤最大重みマッチングの最適性条件：必要性の証明

2通りの証明方法

（1）[代数的]

線形計画の相補性定理を利用

最大重みマッチング問題を線形計画問題に帰着

（2）[組合せ的，グラフ論的]

最大重みマッチングの下記の最適性条件を使う

定理: マッチング M は最大重みマッチング
←→正重みの交互路および交互閉路は存在しない

最短路問題を使って，

相補性条件を満たす双対問題の実行可能解を計算

→ 最適解との関係を示す

線形計画の相補性定理を用いた証明（1）

- 最大重みマッチング問題を，整数計画問題として定式化
  （E = 二部グラフの枝すべての集合）

最大化　$\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件　$\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$

実行可能解 x に対し，$\{(i,j) \in E \mid x_{ij} = 1\}$ はマッチング

∴ 最適解 x* に対し，$\{(i,j) \in E \mid x^*_{ij} = 1\}$ は最大重みマッチング

線形計画の相補性定理を用いた証明(2)

$x_{ij} \in \{0,1\}$ を不等式条件 $x_{ij} \geq 0$ に緩める

→ 線形計画問題へ

最大化 $\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件 $\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

- 任意の実行可能解は $x_{ij} \leq 1$ を満たす
- 最適解x_{ij}^*は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 ➔ 元の整数計画問題の最適解

➔ 最大重みマッチングに対応

証明略

定理: 前のスライドの整数計画問題の最適解は,
上記の線形計画問題の最適解

線形計画の相補性定理を用いた証明（3）

線形計画問題

最大化　$\sum_{(i,j)\in E} v(i,j)x_{ij}$

条件　$\sum_{k\in N:\,(i,k)\in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k\in B:\,(k,j)\in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

その双対問題（＝最大重みマッチングの双対問題）

最小化　$\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j)$

条件　$q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

線形計画の相補性定理を用いた証明(4)

線形計画問題に対する相補性定理の系より，以下が得られる

定理: 線形計画問題の主問題の実行可能解 x_{ij} は最適解
⟷ 以下の条件を満たす，双対問題の実行可能解が存在

$$\left.\begin{array}{l} x_{ij} > 0 \text{ ならば } q(i) + p(j) = v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E) \\ \sum_{k \in N:\,(i,k) \in E} x_{ik} < 1 \text{ ならば } q(i) = 0 \quad (\forall i \in B) \\ \sum_{k \in B:\,(k,j) \in E} x_{kj} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 (\forall j \in N) \end{array}\right\} \text{相補性条件}$$

主問題の実行可能解が マッチングに対応する($x_{ij} \in \{0,1\}$)場合，
相補性条件は下記のように書き換えられる

(i,j)はマッチングの枝 ➔ $q(i) + p(j) = v(i,j)$
$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $q(i) = 0$
$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $p(j) = 0$

線形計画の相補性定理を用いた証明(5)

最大重みマッチングに対応する主問題の解 x_{ij}^* は最適解

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる（証明終わり）

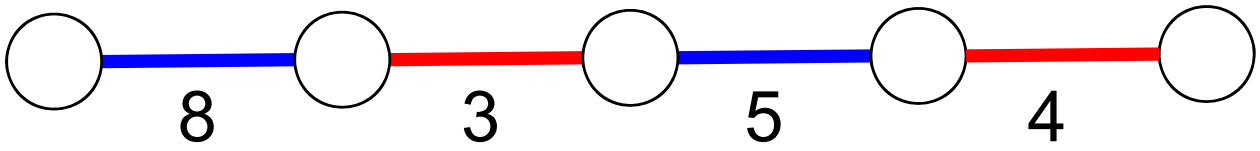
定理: マッチングに対応する実行可能解 x_{ij} は最適解（重み最大）
⇔ 以下の条件を満たす，双対問題の実行可能解が存在

(i,j)はマッチングの枝 ➔ $q(i) + p(j) = v(i,j)$
$i \in B$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $q(i) = 0$
$j \in N$ にマッチングの枝が接続しない ➔ $p(j) = 0$

最大重みマッチングと交互路

交互路・交互閉路による マッチングの更新

定義：マッチング Mに関する交互路（交互閉路）Pの重み
＝ $P \setminus M$の枝重みの和 ー P∩Mの枝重みの和



交互路の重み
＝8-3+5-4=6

命題 M：マッチング，P：（Mに関する）交互路
←→Pを使ってMの枝を入れ替えて得られる
マッチング $(M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ の重み ＝ M の重み + P の重み

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
→現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
→正の重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

最大重みマッチングの最適性条件：交互路を用いた条件

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
➔現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
➔正重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

逆も成り立つ

命題　正の重みの交互路（交互閉路）が存在
🡐現在のマッチングMは最大重みではない
（対偶：マッチングMは最大重みマッチング
🡐正重みの交互路（交互閉路）は存在しない）

マッチングが最適解であるための必要十分条件

定理： マッチング M は最大重みマッチング
🡐➔正重みの交互路および交互閉路は存在しない

マッチングに関する交互路

交互路タイプ1：M以外の枝数＝Mの枝数＋1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1増える）
➔ 増加路と呼ばれる

交互路タイプ2：M以外の枝数＝Mの枝数−1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る「減少路」）

交互路タイプ3：M以外の枝数＝Mの枝数
（枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変）

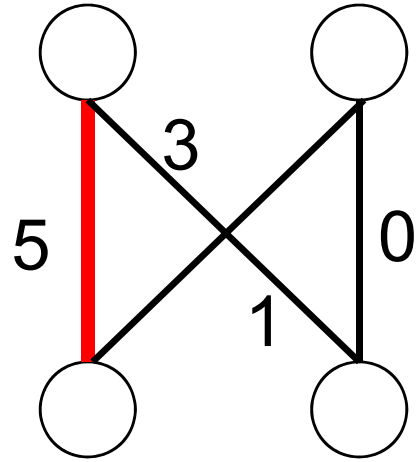
有向グラフを使った証明（その１）

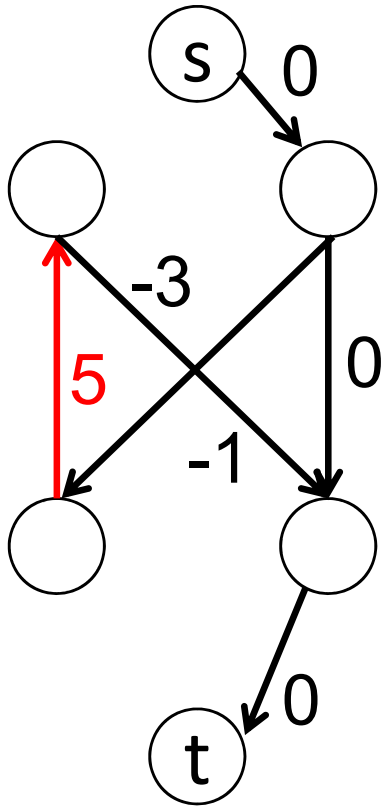
有向グラフのつくりかた

- マッチングMの各枝に対し，　長さ＝枝重み
  N 側から B 側に向き付け
- それ以外の枝を，B 側から N 側に向き付け
  長さ＝－（枝重み）
- B 側の各頂点 u に対し，　長さ＝0
  - マッチング枝が接続なし➔ (s,u)をおく
- N 側の各頂点 v に対し，　長さ＝0
  - マッチング枝が接続なし➔ (v,t)をおく

➔ 増加路は s から t への有向路に対応
交互閉路は有向閉路に対応

∴ M が最大重みマッチングのとき，
s から t への有向路および有向閉路の長さ ≧ 0
（∵ 増加路および交互閉路の重み ≦ 0）



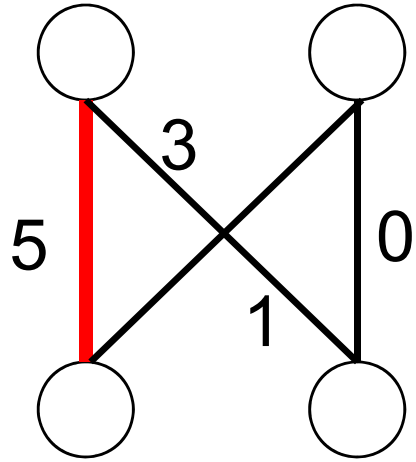


有向グラフを使った証明（その2）

グラフの修正：

(1) B 側の各頂点 u に対し，
　マッチング枝が接続➔枝 (u,s) をおく　長さ＝0

N 側の各頂点 v に対し，
　マッチング枝が接続➔枝 (s,v) をおく　長さ＝0

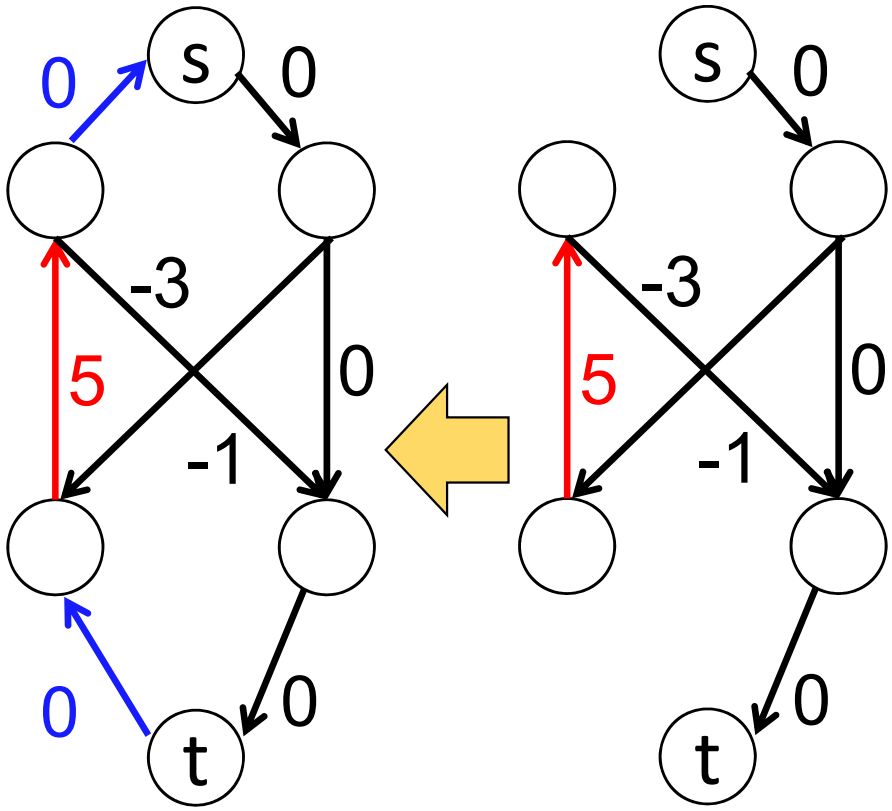


➔ タイプ2の交互路は
　t から s への有向路に対応

タイプ3の交互路は，s, t の一方のみを通過する有向閉路に対応

∴ M が最大重みマッチングのとき，
　t から s への有向路の長さ ≧ 0

s, t の一方のみを通過する有向閉路の長さ ≧ 0
　（∵ 交互路の重み ≦ 0）

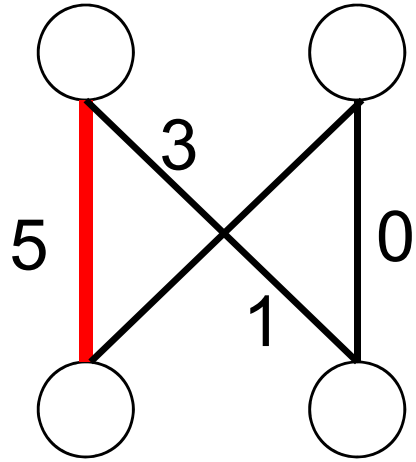


有向グラフを使った証明（その3）

グラフの修正：

(2) 頂点 s と t をひとつにまとめる

➔ s から t への有向路および t から s への有向路は s を通過する有向閉路になる

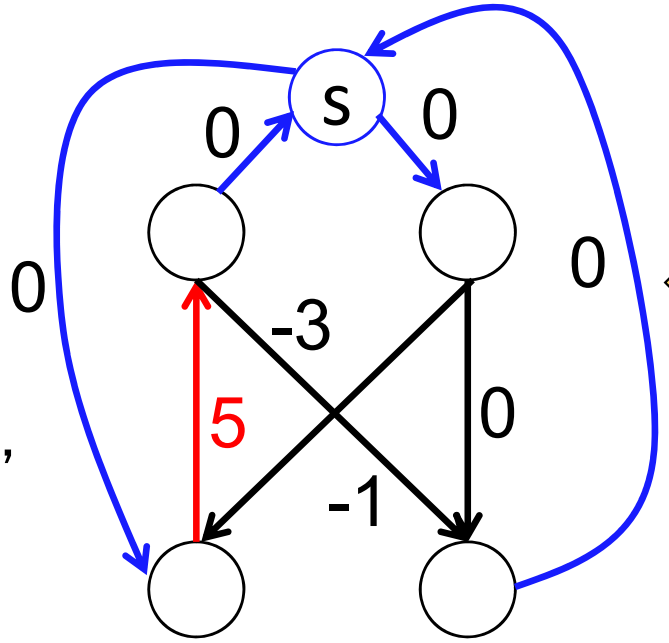


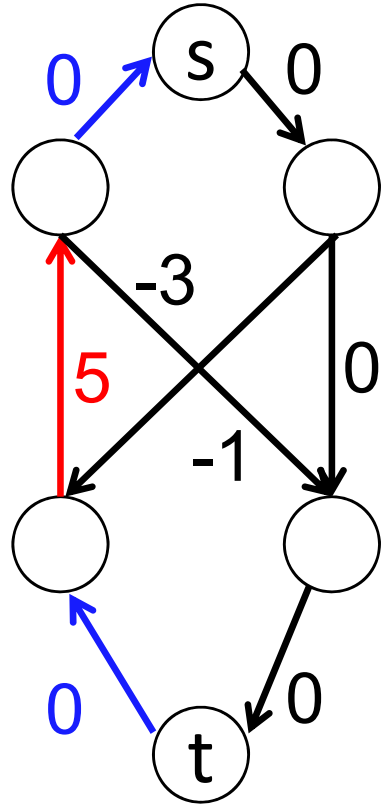
よって，有向グラフの有向閉路は

s を通過する ➔ タイプ1，2，3の交互路に対応

s を通過しない

➔ 交互閉路に対応





∴M が

最大重みマッチングのとき，

有向閉路の長さ ≧ 0

（負閉路なし）

有向グラフを使った証明（その4）

グラフの修正：

(3)マッチングMの各枝に対し，

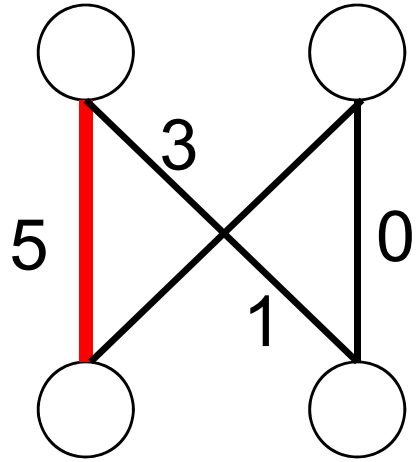
B 側から N 側への枝を追加

長さ＝－（枝重み）

s 以外の各頂点 v に対し，

マッチング枝が接続なし ➔ 逆向き枝を追加

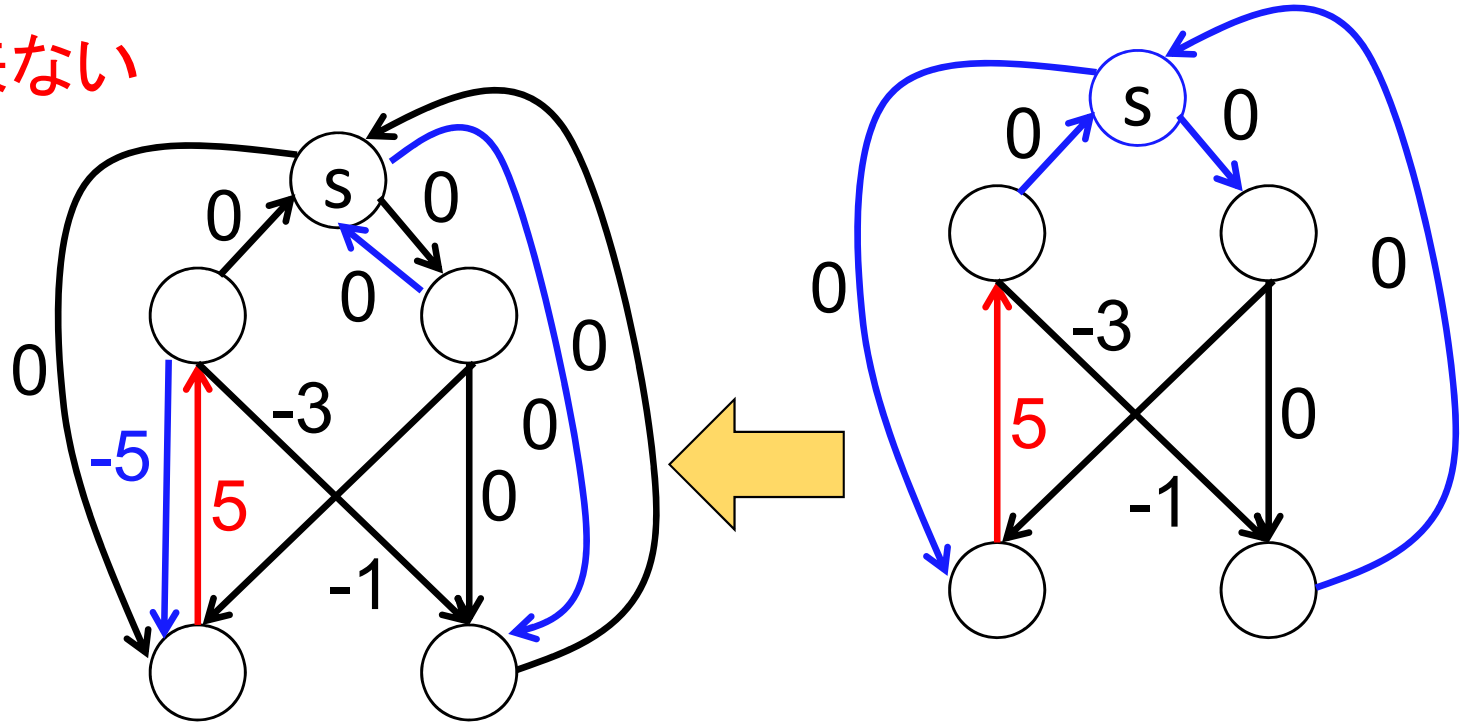
長さ＝0



※ これらの枝 (i,j) を追加しても

負閉路は新たに出来ない

（∵追加した枝(i,j) を含む閉路は {(i,j), (j,i)} のみ）



有向グラフを使った証明（その5）

修正後の有向グラフにおいて，

M が最大重みマッチングのとき，

　有向閉路の長さ ≧ 0（負閉路なし）

∴ 頂点 s から任意の頂点への最短路が存在

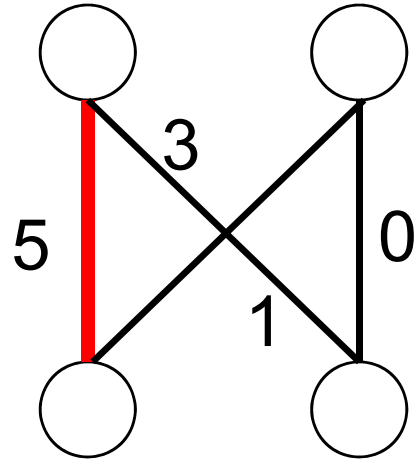
d(u) ≡ s から頂点 u への最短路長　とおく

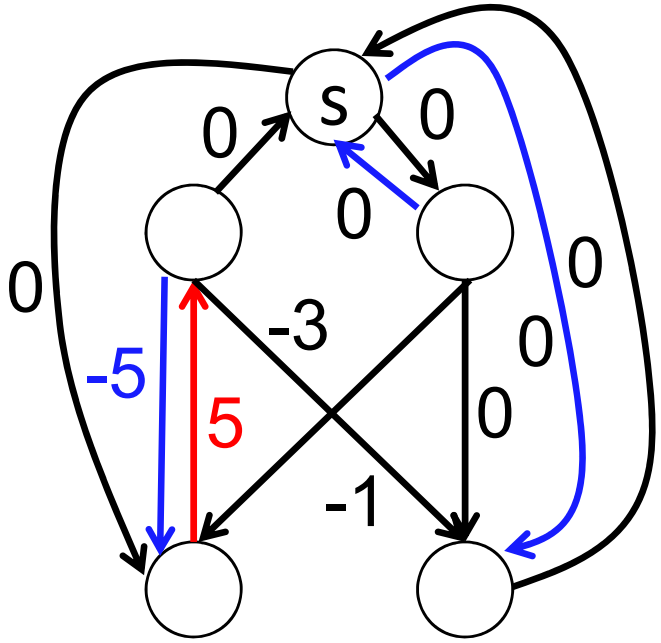
さらに，q(i) ≡ d(i) (i∈B)，p(j) ≡ −d(j) (j∈N)　とおく

➔ 最適性条件を満たす

　　双対問題の実行可能解

　（証明は以降のスライドで）





有向グラフを使った証明（その6）

d はポテンシャルかつ d(s)=0 なので，以下が成立

① 任意の枝 (i,j) (i∈B, j∈N)に対し，

$$d(j) - d(i) \leqq -v(i,j)$$

② 任意の i∈B に対し，d(s) - d(i)≦0

$$\therefore d(i) \geqq d(s)=0$$

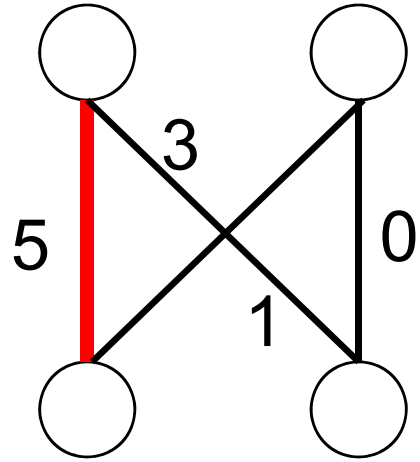
③ 任意の j∈N に対し，d(j) - d(s)≦0

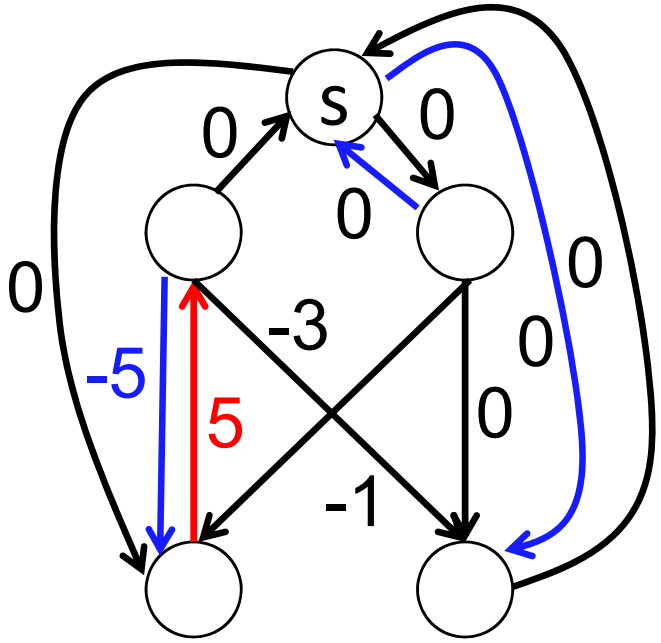
$$\therefore d(j) \leqq d(s)=0$$

q(i) ≡ d(i) (i∈B)，p(j) ≡ −d(j) (j∈N)　とおくと

①，②，③より，(q,p) は

双対問題の実行可能解





有向グラフを使った証明（その7）

④ マッチング枝 (i,j) (i∈B, j∈N)に対し,

$d(i) - d(j) \leqq v(i,j)$, $d(j) - d(i) \leqq -v(i,j)$

$\therefore\ d(i) - d(j) = v(i,j)$

⑤ マッチング枝の接続していない i∈B に対し,

$d(i) - d(s) \leqq 0$, $d(s) - d(i) \leqq 0$

$\therefore\ d(i) = d(s) = 0$

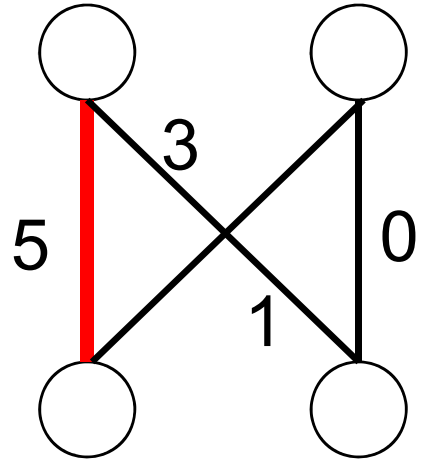
⑥ マッチング枝の接続していない j∈N に対し,

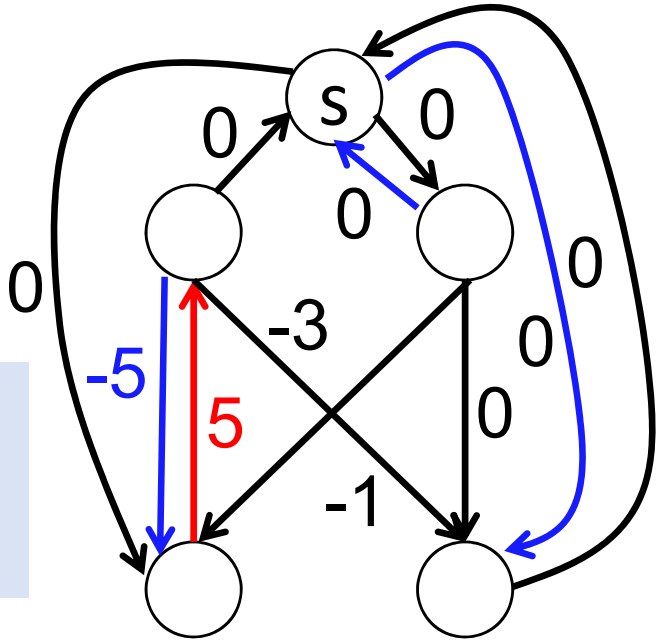
$d(j) - d(s) \leqq 0$, $d(s) - d(j) \leqq 0$ $\therefore\ d(j) = d(s) = 0$

$q(i) \equiv d(i)$ (i∈B), $p(j) \equiv -d(j)$ (j∈N) とおくと

④, ⑤, ⑥より以下の条件が成立

マッチング M に含まれる任意の枝に対し, $q(i)+p(j) = v(i,j)$
i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ $q(i)=0$
j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ $p(j)=0$





枝重みが整数値の場合の最適性条件

枝重みが整数の場合，より強い結果

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
←→ 双対問題の実行可能解(q,p)で，q, p は整数ベクトルであり，
かつ次の条件を満たすものが存在：
マッチング M に含まれる任意の枝に対し，$q(i)+p(j) = v(i,j)$
$i \in B$ にマッチング M の枝が接続していない → $q(i)=0$
$j \in N$ にマッチング M の枝が接続していない → $p(j)=0$

[証明] 枝重みが整数 → 有向グラフの枝長が整数
→ 最短路長が整数
→ 証明における q(i), p(j) の決め方より，
q(i), p(j) として整数が選べる

演習問題

(A)

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(B)

v(i,j)	A	B
①	3	1
②	7	6
③	1	7

上記の(A)(B)に対応する最大重みマッチング問題に関して，以下の問いに答えよ．いずれも結果のみ書けばよい．

問1：整数計画問題としての定式化を書け．
問2：双対問題を書け．
問3：最大重みマッチングおよび双対問題の最適解を求めよ．
問4：問3の最大重みマッチングに関する有向グラフを書け．
問5：問4の有向グラフにおいて，頂点 s から各頂点への最短路長を求めよ．