

# 数理経済学特講

## 複数財に対するオークションの 数理とアルゴリズム

---

### 第7回 最大重みマッチングの相補性定理

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

# 変数の差の不等式系の解を求める

ケース1: 全ての制約に2つの変数が現れる場合

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$$

$$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$$

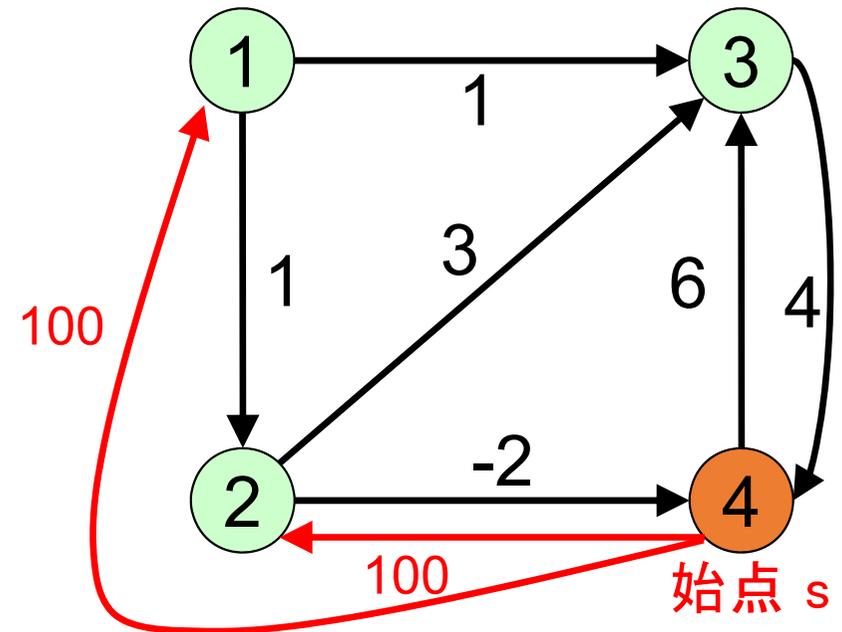
$$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6$$

差分不等式系の解

=以下のグラフのポテンシャル

- 各変数に対応する頂点を追加
- 各制約  $p_v - p_u \leq \alpha$  に対し,  
長さ =  $\alpha$  の枝  $(u, v)$  を追加
- 適当な頂点を始点  $s$  とおき,  $s$  から各頂点への最短路長を計算
  - 負閉路が存在する  $\rightarrow$  解なし
  - 負閉路が存在しない  $\rightarrow$  最短路長  $d(v)$  は解

※注意: 頂点  $s$  からある頂点  $u$  への路が存在しない場合,  
長さの十分大きい枝  $(s, u)$  を追加



# 変数の差の不等式系の解を求める

## ケース2: 変数1つの制約を含む場合

$$p_2 - p_1 \leq 1, p_3 - p_1 \leq 1,$$

$$p_3 - p_2 \leq 3, p_4 - p_2 \leq -2,$$

$$p_4 - p_3 \leq 4, p_3 - p_4 \leq 6, p_1 \leq 0, p_4 \geq 3$$

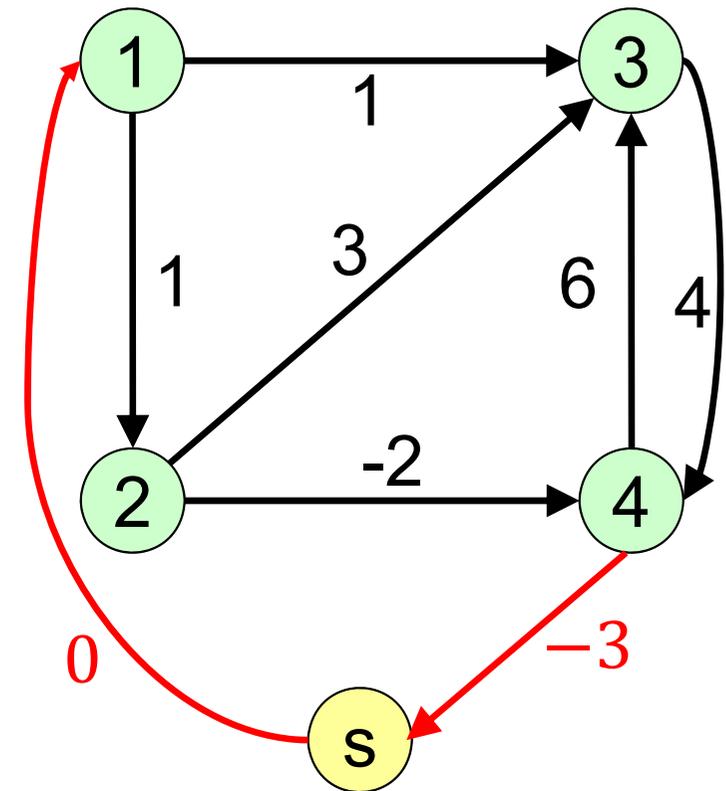
## ケース1からの修正点:

### (1) 変数2つの制約に変換する

- 新しい変数  $p_s$  を追加 (頂点  $s$  追加)
- 各変数  $p_1, \dots, p_n$  に対し,
  - $p_v \leq \beta$  の形の制約が存在  
 $\rightarrow p_v - p_s \leq \beta$  に置き換え (長さ  $\beta$  の枝  $(s, v)$  追加)
  - $p_v \geq \gamma$  の形の制約が存在  
 $\rightarrow p_s - p_v \leq -\gamma$  に置き換え (長さ  $-\gamma$  の枝  $(v, s)$  追加)

### (2) $s$ を始点として, 各頂点への最短路長を計算

- 負閉路が存在しないならば,  $p(s)=0$ となるのでうまくいく

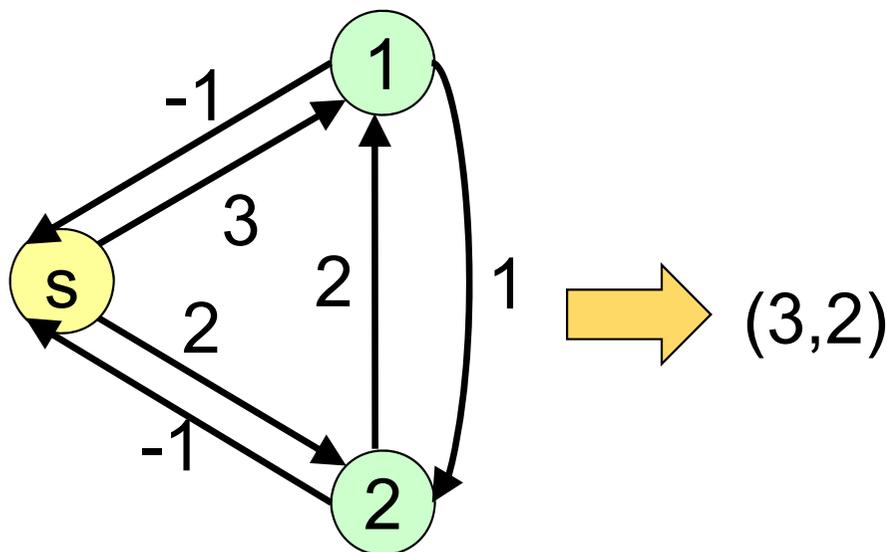
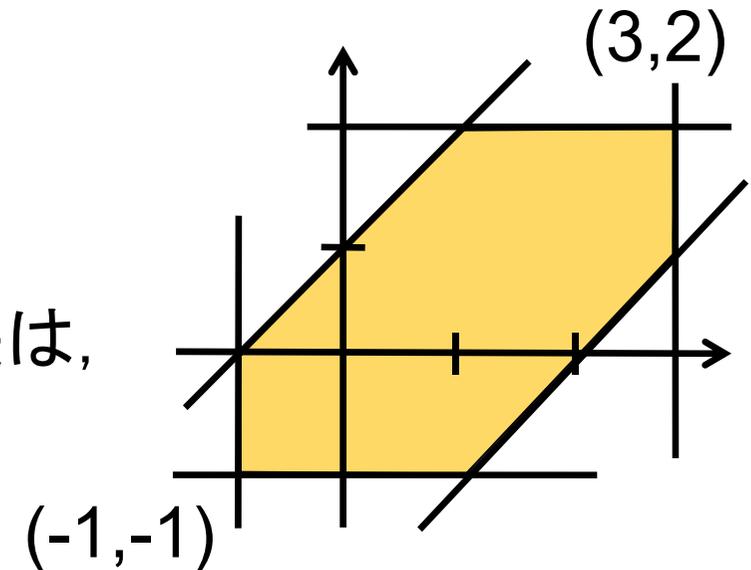


# 極大解・極小解の求め方(1)

- 差分不等式系に極小解・極大解が存在する場合, それらは唯一

$$\begin{aligned} p_2 - p_1 &\leq 1, & p_1 - p_2 &\leq 2, \\ -1 &\leq p_1 \leq 3, & -1 &\leq p_2 \leq 2 \end{aligned}$$

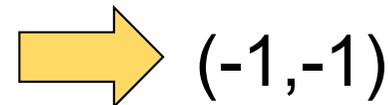
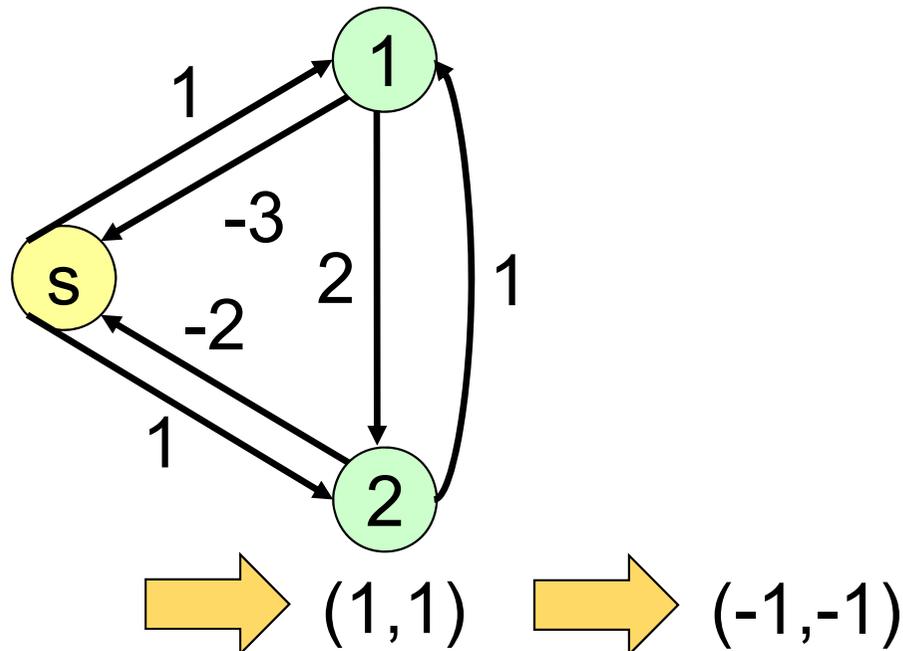
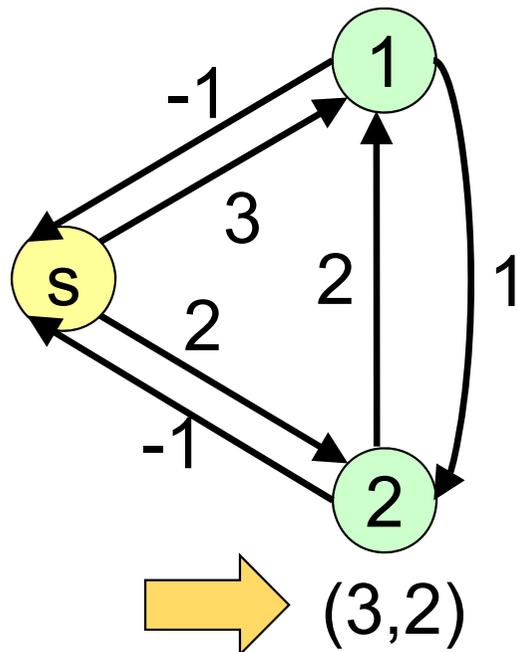
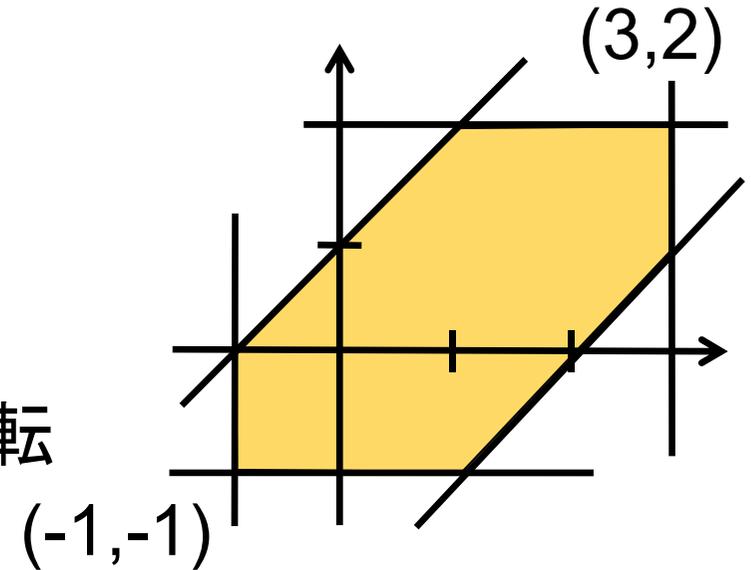
- 直前のスライドで示したグラフの最短路長は,  
差分不等式系の**極大解**



# 極大解・極小解の求め方(2)

## 極小解の求め方

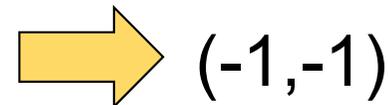
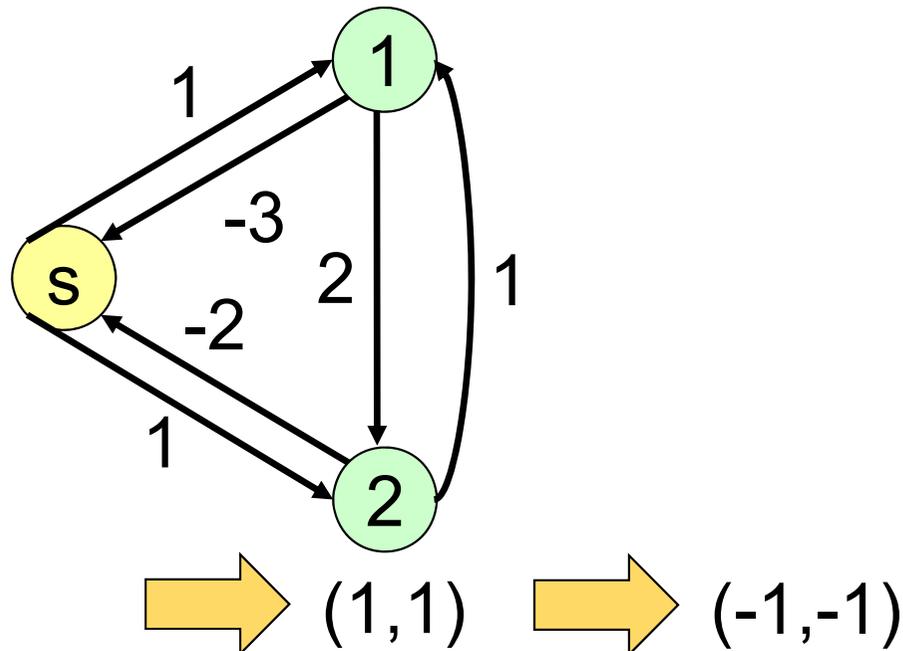
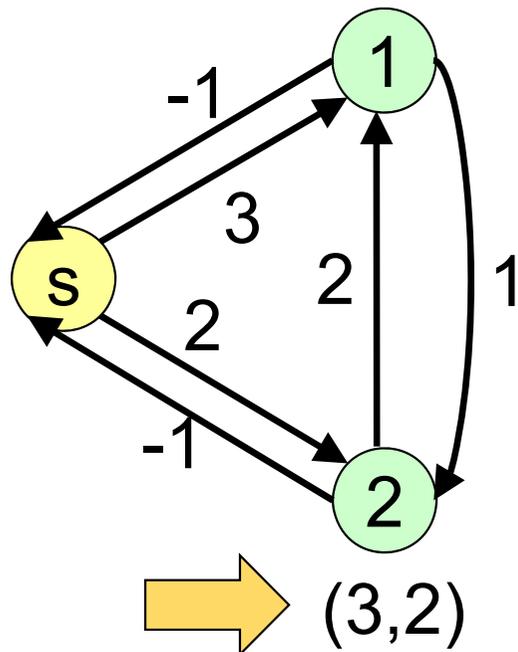
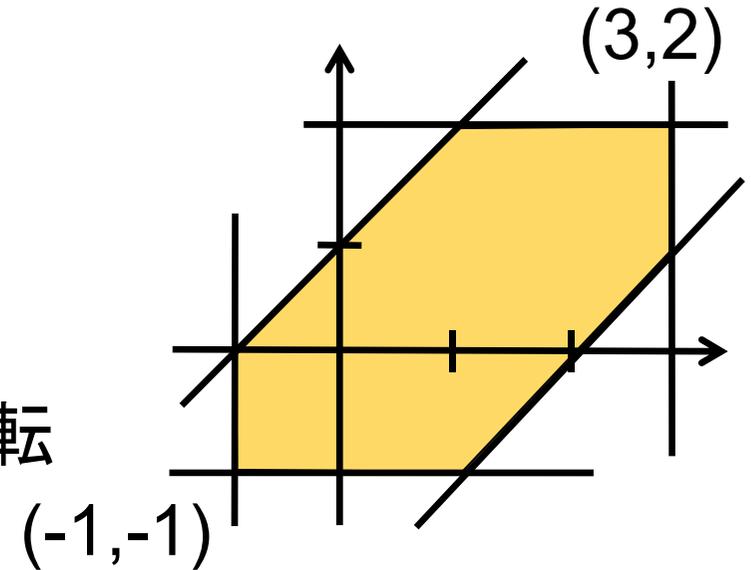
- 枝の向きを逆に
- $s$ に接続しない枝の長さはそのまま
- $s$ に接続するの枝の長さの符号を反転
- 最短路長を計算 → 得られた解の符号を反転  
→ 差分不等式系の**極小解**



# 極大解・極小解の求め方(3)

## 極小解の求め方

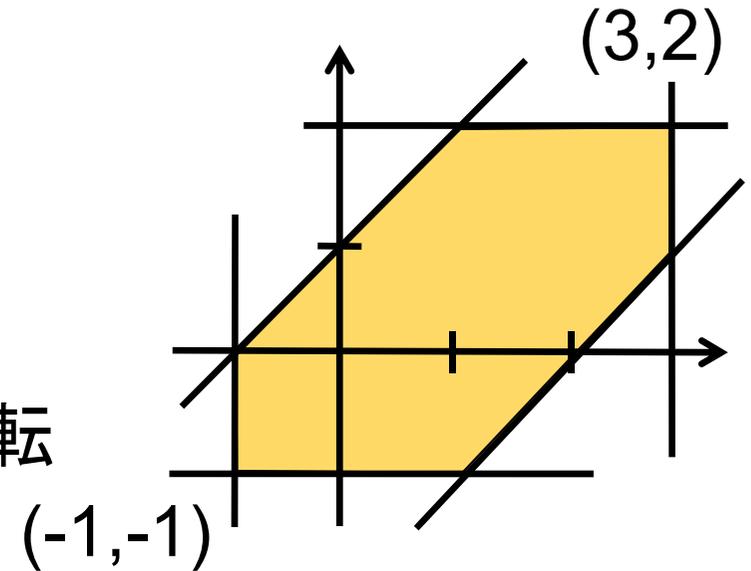
- 枝の向きを逆に
- $s$ に接続しない枝の長さはそのまま
- $s$ に接続するの枝の長さの符号を反転
- 最短路長を計算 → 得られた解の符号を反転  
→ 差分不等式系の**極小解**



# 極大解・極小解の求め方(4)

## 極小解の求め方

- 枝の向きを逆に
- $s$ に接続しない枝の長さはそのまま
- $s$ に接続するの枝の長さの符号を反転
- 最短路長を計算  $\rightarrow$  得られた解の符号を反転  
 $\rightarrow$  差分不等式系の**極小解**

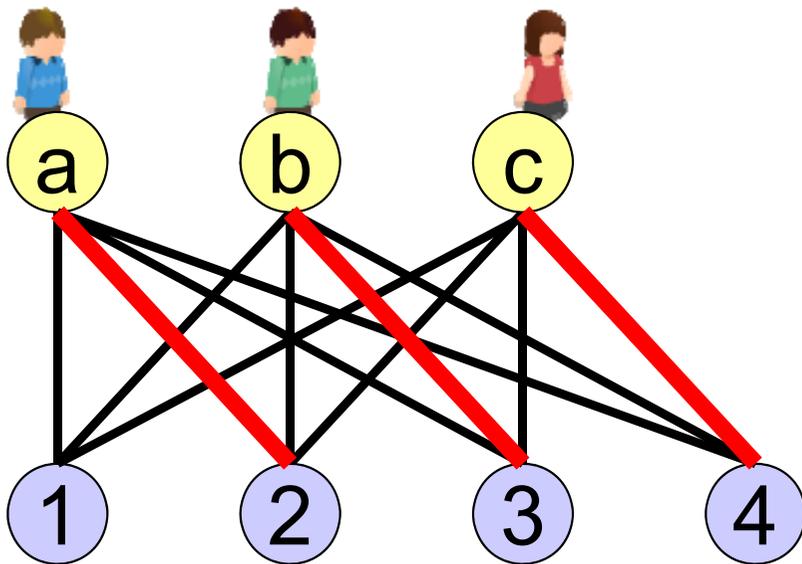


## 考え方

- $(p_1, \dots, p_n)$ に関する極小解  $\leftrightarrow (q_1, \dots, q_n) = (-p_1, \dots, -p_n)$ に関する極大解
- 差分不等式系の変数  $p_1, \dots, p_n$ を  $-q_1, \dots, -q_n$ に置き換え、得られた差分不等式系に対応するグラフを作る  $\rightarrow$  前述のグラフ
- 得られた解は  $(q_1, \dots, q_n)$ に関する極大解  
 $\rightarrow$  符号を反転すると,  $(p_1, \dots, p_n)$ に関する極小解

# 最大重みマッチング問題

- 各入札者の各財への評価値  $v(i,j)$  が与えられている状況で入札者に割り当てられた財の評価値の合計を最大化したい



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

- 最大重みマッチング問題:**

枝に重みを与えられたグラフにおいて,

枝重みの和が最大のマッチングを求める

# 双対問題の定式化

最小化  $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件  $q(i) + p(j) \geq v(i, j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

# 相補性定理

最大重みマッチング問題と双対問題の実行可能解が最適解であるための必要十分条件

定理:

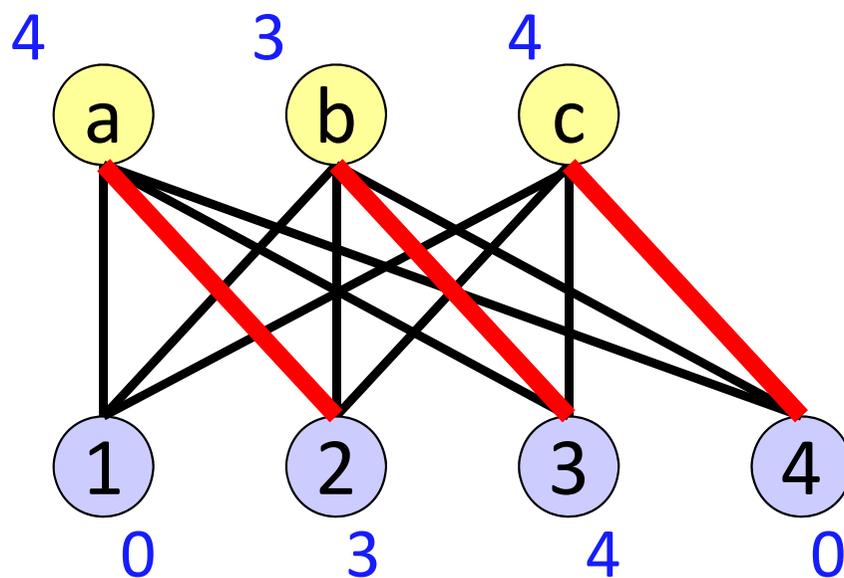
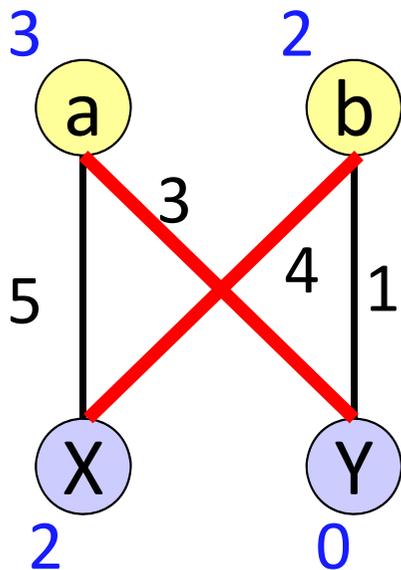
任意のマッチング  $M$  と双対問題の任意の実行可能解  $(q,p)$  に対し,  
 $M$  は最大重みマッチング, かつ  $(q,p)$  は双対問題の最適解

↔ 以下の条件が成立:

マッチング  $M$  に含まれる任意の枝に対し,  $q(i)+p(j) = v(i,j)$

$i \in B$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow q(i)=0$

$j \in N$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow p(j)=0$



$v(i,j)$	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

# ⑤ 相補性定理: 必要性の証明

## 2通りの証明方法

### (1) [代数的]

線形計画の相補性定理を利用

最大重みマッチング問題を線形計画問題に帰着

### (2) [組合せ的, グラフ論的]

最大重みマッチングの下記の最適性条件を使う

**定理:** マッチング  $M$  は最大重みマッチング

↔ 正重みの交互路および交互閉路は存在しない

最短路問題を使って,

相補性条件を満たす双対問題の実行可能解を計算

→ 最適解との関係を示す

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(1)

- 最大重みマッチング問題を, **整数計画問題**として定式化  
( $E$  = 二部グラフの枝すべての集合)

最大化  $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件  $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (\forall (i,j) \in E)$$

実行可能解  $x$  に対し,  $\{(i,j) \in E \mid x_{ij} = 1\}$  はマッチング

$\therefore$  最適解  $x^*$  に対し,  $\{(i,j) \in E \mid x_{ij}^* = 1\}$  は最大重みマッチング

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(2)

$x_{ij} \in \{0,1\}$  を不等式条件  $x_{ij} \geq 0$  に緩める

→ 線形計画問題へ

最大化  $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件  $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$

$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$

• 任意の実行可能解は  $x_{ij} \leq 1$  を満たす

• 最適解  $x_{ij}^*$  は 0 or 1 とは限らない

0 or 1 → 元の整数計画問題の最適解

→ 最大重みマッチングに対応

定理: 前のスライドの整数計画問題の最適解は,

証明略

上記の線形計画問題の最適解

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(3)

線形計画問題

最大化  $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件  $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$$

その双対問題 (=最大重みマッチングの双対問題)

最小化  $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件  $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(4)

線形計画問題に対する相補性定理の系より, 以下が得られる

**定理:** 線形計画問題の主問題の実行可能解  $x_{ij}$  は最適解

$\leftrightarrow$  以下の条件を満たす, 双対問題の実行可能解が存在

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij} > 0 \text{ ならば } q(i) + p(j) = v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E) \\ \sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} < 1 \text{ ならば } q(i) = 0 \quad (\forall i \in B) \\ \sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 \quad (\forall j \in N) \end{array} \right\} \text{相補性条件}$$

主問題の実行可能解がマッチングに対応する ( $x_{ij} \in \{0,1\}$ ) 場合,  
相補性条件は下記のように書き換えられる

$$\begin{array}{l} (i,j) \text{ はマッチングの枝} \rightarrow q(i) + p(j) = v(i,j) \\ i \in B \text{ にマッチングの枝が接続しない} \rightarrow q(i) = 0 \\ j \in N \text{ にマッチングの枝が接続しない} \rightarrow p(i) = 0 \end{array}$$

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(5)

最大重みマッチングに対応する主問題の解  $x_{ij}^*$  は最適解

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる (証明終わり)

**定理:** マッチングに対応する実行可能解  $x_{ij}$  は最適解 (重み最大)

↔ 以下の条件を満たす, 双対問題の実行可能解が存在

$(i,j)$  はマッチングの枝  $\rightarrow q(i) + p(j) = v(i,j)$

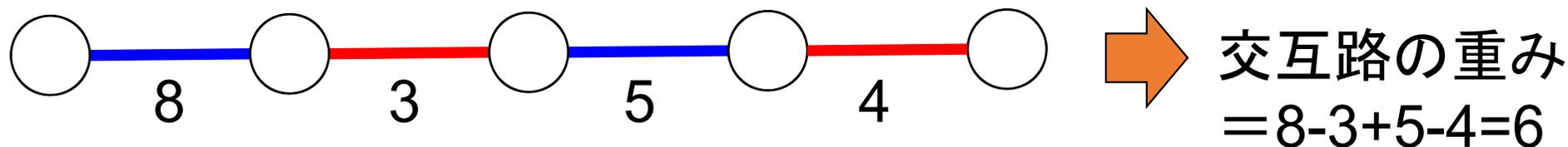
$i \in B$  にマッチングの枝が接続しない  $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$  にマッチングの枝が接続しない  $\rightarrow p(j) = 0$

# 最大重みマッチングと交互路

# 交互路・交互閉路による マッチングの更新

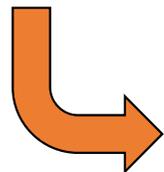
**定義:** マッチング  $M$  に関する交互路 (交互閉路)  $P$  の **重み**  
 $= P \setminus M$  の枝重みの和  $- P \cap M$  の枝重みの和



**命題**  $M$ : マッチング,  $P$ : ( $M$  に関する) 交互路

$\leftrightarrow$   $P$  を使って  $M$  の枝を入れ替えて得られる

**マッチング**  $(M \setminus P) \cup (P \setminus M)$  の重み  $= M$  の重み  $+ P$  の重み



**命題** 正の重みの交互路 (交互閉路) が存在

$\rightarrow$  現在のマッチング  $M$  は最大重みではない

(対偶: マッチング  $M$  は最大重みマッチング

$\rightarrow$  正の重みの交互路 (交互閉路) は存在しない)

# 最大重みマッチングの最適性条件： 交互路を用いた条件

**命題** 正の重みの交互路(交互閉路)が存在  
 →現在のマッチングMは最大重みではない  
 (対偶: マッチングMは最大重みマッチング  
 →正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

逆も成り立つ

**命題** 正の重みの交互路(交互閉路)が存在  
 ←現在のマッチングMは最大重みではない  
 (対偶: マッチングMは最大重みマッチング  
 ←正重みの交互路(交互閉路)は存在しない)

マッチングが最適解であるための必要十分条件

**定理:** マッチング M は最大重みマッチング  
 ↔正重みの交互路および交互閉路は存在しない

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(3)

線形計画問題

最大化  $\sum_{(i,j) \in E} v(i,j)x_{ij}$

条件  $\sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} \leq 1 \quad (\forall i \in B)$

$$\sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} \leq 1 \quad (\forall j \in N)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (\forall (i,j) \in E)$$

その双対問題 (=最大重みマッチングの双対問題)

最小化  $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件  $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E)$

$$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B), \quad p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$$

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(4)

線形計画問題に対する相補性定理の系より, 以下が得られる

**定理:** 線形計画問題の主問題の実行可能解  $x_{ij}$  は最適解  
 $\leftrightarrow$  以下の条件を満たす, 双対問題の実行可能解が存在

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij} > 0 \text{ ならば } q(i) + p(j) = v(i,j) \quad (\forall (i,j) \in E) \\ \sum_{k \in N: (i,k) \in E} x_{ik} < 1 \text{ ならば } q(i) = 0 \quad (\forall i \in B) \\ \sum_{k \in B: (k,j) \in E} x_{kj} < 1 \text{ ならば } p(j) = 0 \quad (\forall j \in N) \end{array} \right\} \text{相補性条件}$$

主問題の実行可能解がマッチングに対応する ( $x_{ij} \in \{0,1\}$ ) 場合,  
 相補性条件は下記のように書き換えられる

$$\begin{array}{l} (i,j) \text{ はマッチングの枝} \rightarrow q(i) + p(j) = v(i,j) \\ i \in B \text{ にマッチングの枝が接続しない} \rightarrow q(i) = 0 \\ j \in N \text{ にマッチングの枝が接続しない} \rightarrow p(i) = 0 \end{array}$$

# 線形計画の相補性定理を用いた証明(5)

最大重みマッチングに対応する主問題の解  $x_{ij}^*$  は最適解

∴ 前の定理は以下のように書き換えられる (証明終わり)

**定理:** マッチングに対応する実行可能解  $x_{ij}$  は最適解 (重み最大)

↔ 以下の条件を満たす, 双対問題の実行可能解が存在

$(i,j)$  はマッチングの枝  $\rightarrow q(i) + p(j) = v(i,j)$

$i \in B$  にマッチングの枝が接続しない  $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$  にマッチングの枝が接続しない  $\rightarrow p(j) = 0$

# 有向グラフを使った証明(その1)

## 有向グラフのつくりかた

- マッチング  $M$  の各枝に対し,

長さ = 枝重み

N 側から B 側に向き付け

- それ以外の枝を, B 側から N 側に向き付け

長さ =  $-$  (枝重み)

- B 側の各頂点  $u$  に対し,

長さ = 0

- マッチング枝が接続なし  $\rightarrow (s, u)$  をおく

- N 側の各頂点  $v$  に対し,

長さ = 0

- マッチング枝が接続なし  $\rightarrow (v, t)$  をおく

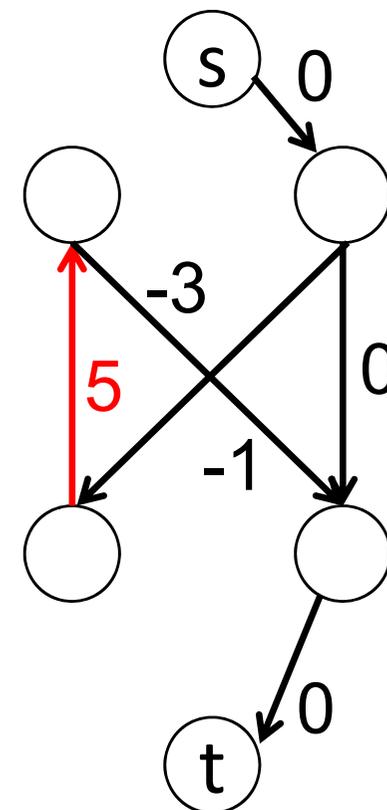
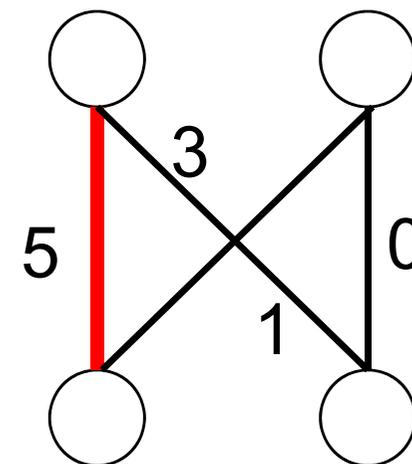
$\rightarrow$  増加路は  $s$  から  $t$  への有向路に対応

交互閉路は有向閉路に対応

$\therefore M$  が最大重みマッチングのとき,

$s$  から  $t$  への有向路および有向閉路の長さ  $\geq 0$

( $\because$  増加路および交互閉路の重み  $\leq 0$ )



# 有向グラフを使った証明(その2)

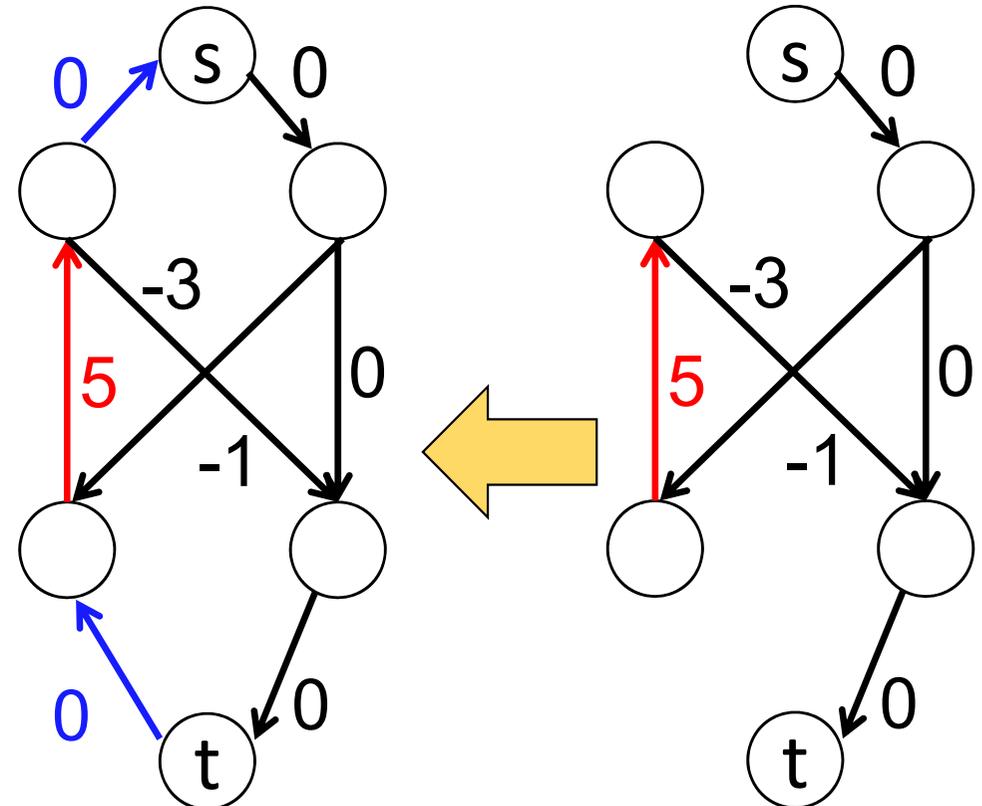
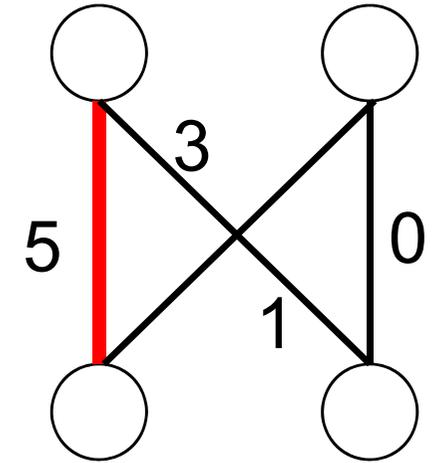
## グラフの修正:

- (1) B側の各頂点  $u$  に対し,  
 マッチング枝が接続  $\rightarrow$  枝  $(u,s)$  をおく
- N側の各頂点  $v$  に対し,  
 マッチング枝が接続  $\rightarrow$  枝  $(s,v)$  をおく

長さ=0

長さ=0

- $\rightarrow$  「減少」路は  
 $t$  から  $s$  への有向路に対応
- $\therefore M$  が最大重みマッチング  
 のとき,  
 $t$  から  $s$  への有向路  
 の長さ  $\geq 0$   
 ( $\because$  「減少」路の重み  $\leq 0$ )



# 有向グラフを使った証明(その3)

グラフの修正:

(2) 頂点  $s$  と  $t$  をひとつにまとめる

→  $s$  から  $t$  への有向路, および

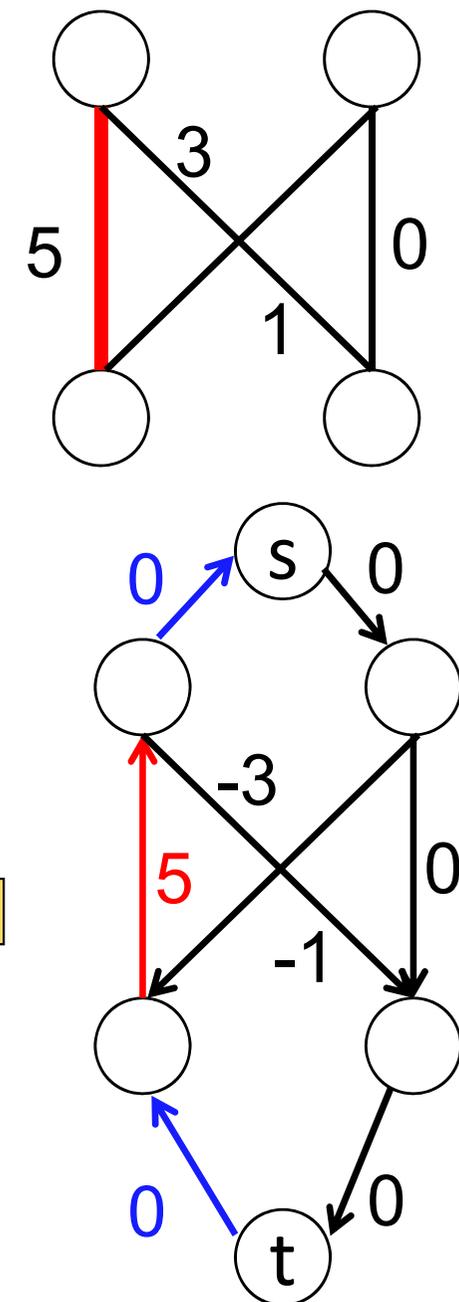
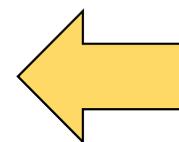
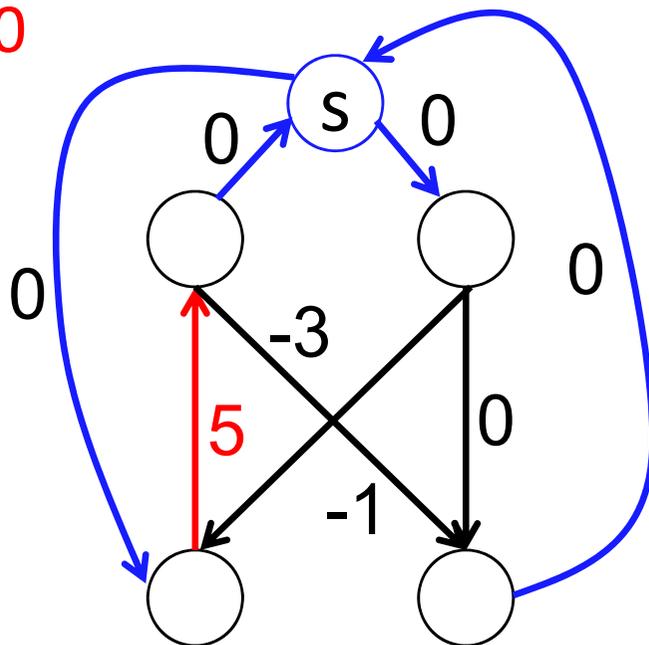
$t$  から  $s$  への有向路は

$s$  を通過する有向閉路に対応

∴  $M$  が最大重みマッチングのとき,

有向閉路の長さ  $\geq 0$

(負閉路なし)



# 有向グラフを使った証明(その4)

## グラフの修正:

(3) マッチング  $M$  の各枝に対し,

長さ = - (枝重み)

B 側から N 側への枝を追加

$s$  以外の各頂点  $v$  に対し,

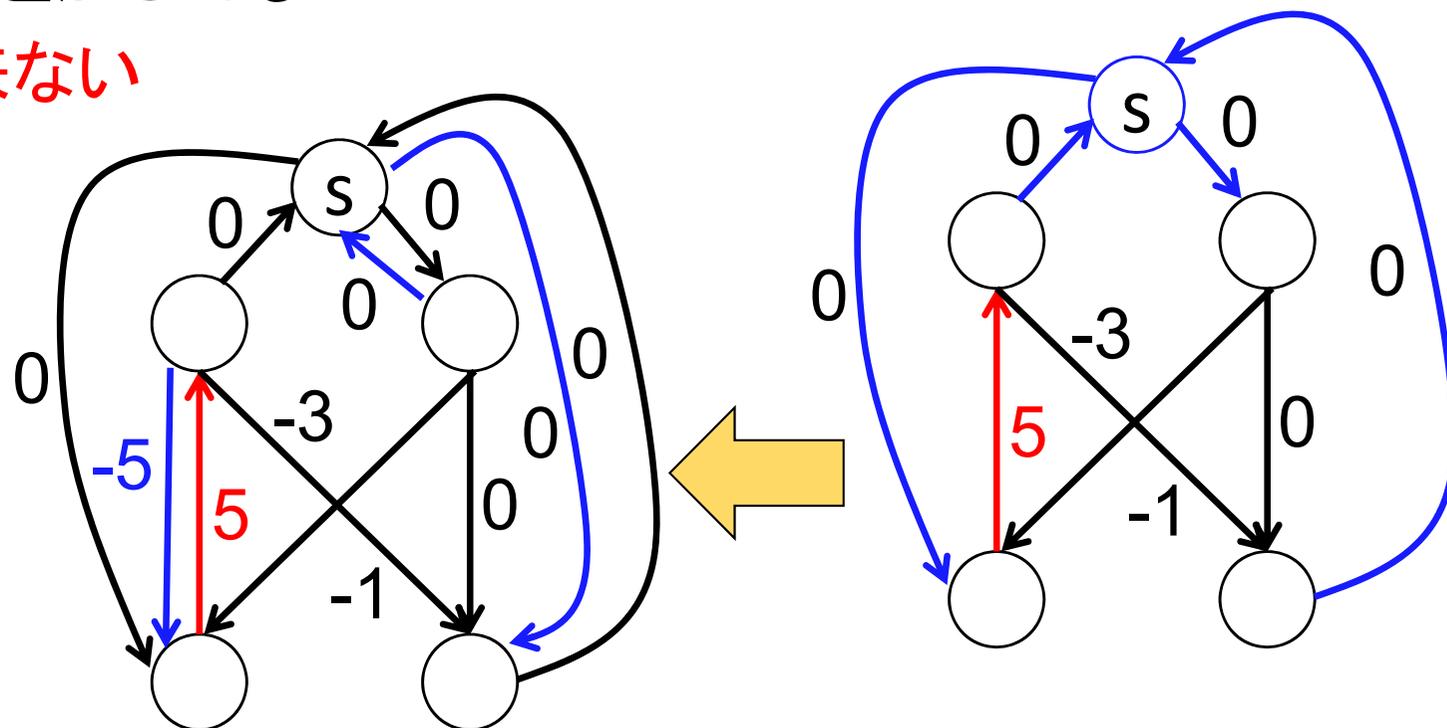
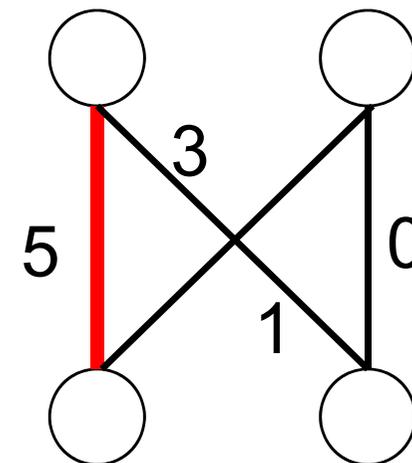
長さ = 0

マッチング枝が接続なし  $\rightarrow$  逆向き枝を追加

※ これらの枝  $(i,j)$  を追加しても

負閉路は新たに出来ない

( $\because$  追加した枝  $(i,j)$  を  
含む閉路は  
 $\{(i,j), (j,i)\}$  のみ)



# 有向グラフを使った証明(その5)

修正後の有向グラフにおいて,  
M が最大重みマッチングのとき,

**有向閉路の長さ  $\geq 0$  (負閉路なし)**

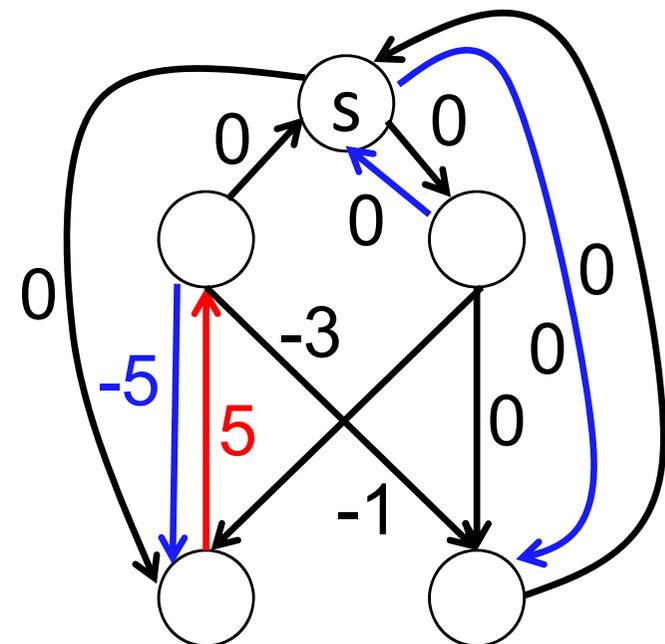
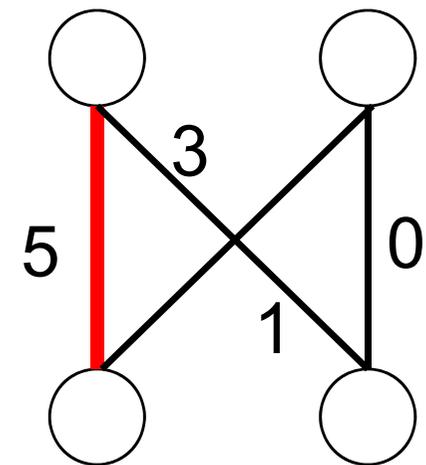
$\therefore$  頂点  $s$  から任意の頂点への最短路が存在

$d(u) \equiv s$  から頂点  $u$  への最短路長 とおく

さらに,  $q(i) \equiv d(i) (i \in B), p(j) \equiv -d(j) (j \in N)$  とおく

→ 最適性条件を満たす

双対問題の実行可能解  
(証明は以降のスライドで)



# 有向グラフを使った証明(その6)

$d$  はポテンシャルかつ  $d(s)=0$  なので、以下が成立

① 任意の枝  $(i,j)$  ( $i \in B, j \in N$ ) に対し,

$$d(j) - d(i) \leq -v(i,j)$$

② 任意の  $i \in B$  に対し,  $d(s) - d(i) \leq 0$

$$\therefore d(i) \geq d(s)=0$$

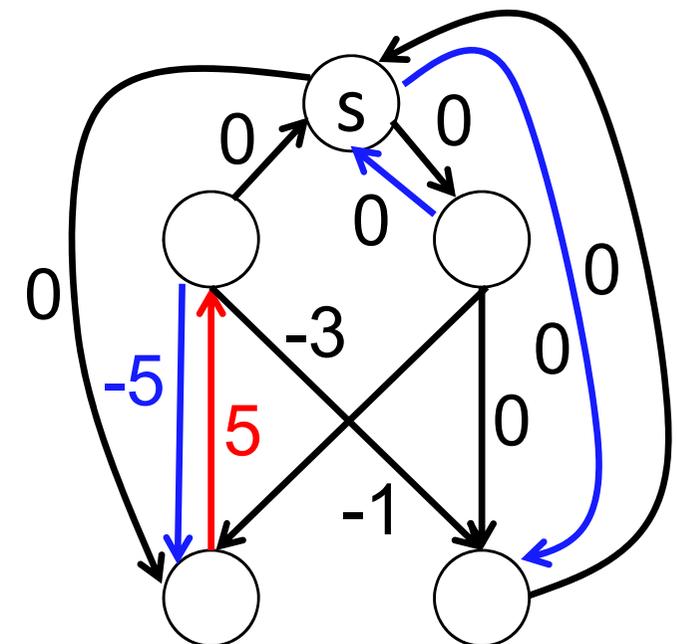
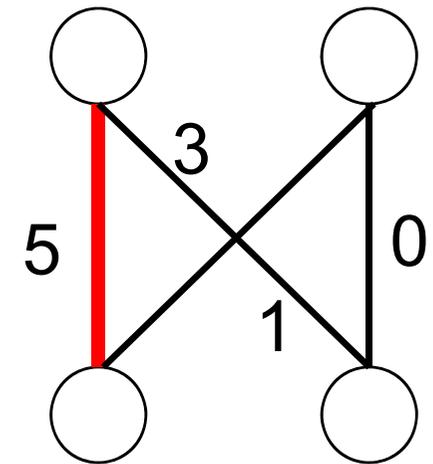
③ 任意の  $j \in N$  に対し,  $d(j) - d(s) \leq 0$

$$\therefore d(j) \leq d(s)=0$$

$q(i) \equiv d(i)$  ( $i \in B$ ),  $p(j) \equiv -d(j)$  ( $j \in N$ ) とおくと

①, ②, ③より,  $(q,p)$  は

双対問題の実行可能解



# 有向グラフを使った証明(その7)

④ マッチング枝  $(i,j)$  ( $i \in B, j \in N$ ) に対し,

$$d(i) - d(j) \leq v(i,j), \quad d(j) - d(i) \leq -v(i,j)$$

$$\therefore d(i) - d(j) = v(i,j)$$

⑤ マッチング枝の接続していない  $i \in B$  に対し,

$$d(i) - d(s) \leq 0, \quad d(s) - d(i) \leq 0$$

$$\therefore d(i) = d(s) = 0$$

⑥ マッチング枝の接続していない  $j \in N$  に対し,

$$d(j) - d(s) \leq 0, \quad d(s) - d(j) \leq 0 \quad \therefore d(j) = d(s) = 0$$

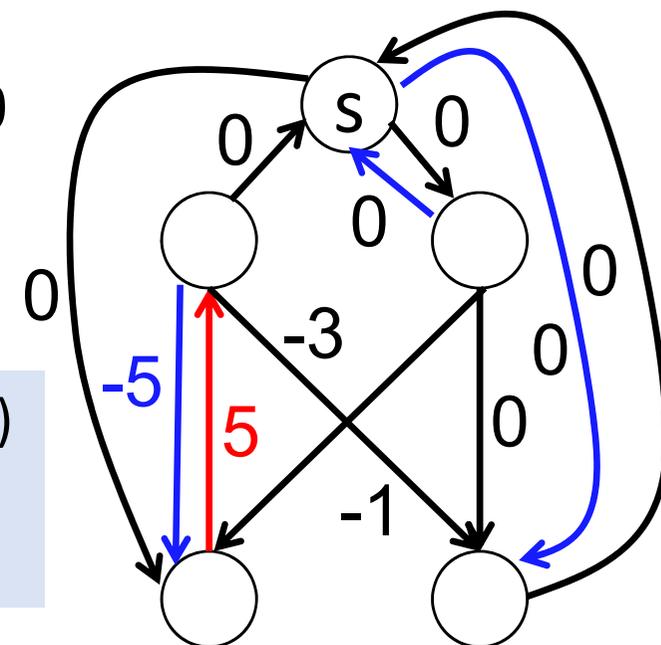
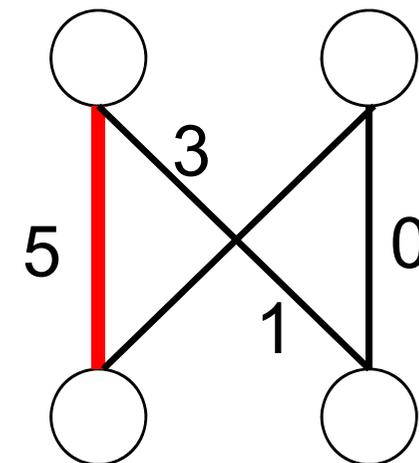
$q(i) \equiv d(i)$  ( $i \in B$ ),  $p(j) \equiv -d(j)$  ( $j \in N$ ) とおくと

④, ⑤, ⑥より以下の条件が成立

マッチング  $M$  に含まれる任意の枝に対し,  $q(i) + p(j) = v(i,j)$

$i \in B$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow p(j) = 0$



# 枝重みが整数値の場合の最適性条件

枝重みが整数の場合, より強い結果

**定理:** 二部グラフのマッチング  $M$  は最大重み

↔ 双対問題の実行可能解  $(q, p)$  で,  $q, p$  は整数ベクトルであり,  
かつ次の条件を満たすものが存在:

マッチング  $M$  に含まれる任意の枝に対し,  $q(i) + p(j) = v(i, j)$

$i \in B$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow q(i) = 0$

$j \in N$  にマッチング  $M$  の枝が接続していない  $\rightarrow p(j) = 0$

[証明] 枝重みが整数  $\rightarrow$  有向グラフの枝長が整数

$\rightarrow$  最短路長が整数

$\rightarrow$  証明における  $q(i), p(j)$  の決め方より,  
 $q(i), p(j)$  として整数が選べる

# 演習問題

(A)

$v(i,j)$	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

(B)

$v(i,j)$	A	B
①	3	1
②	7	6
③	1	7

上記の(A)(B)に対応する最大重みマッチング問題に関して、以下の問いに答えよ。いずれも結果のみ書けばよい。

問1: 整数計画問題としての定式化を書け。

問2: 双対問題を書け。

問3: 最大重みマッチングおよび双対問題の最適解を求めよ。

問4: 問3の最大重みマッチングに関する有向グラフを書け。

問5: 問4の有向グラフにおいて、頂点  $s$  から各頂点への最短路長を求めよ。