数理経済学特講

複数財に対するオークションの数理とアルゴリズム

第5回　二部グラフの最大重みマッチング問題およびその双対問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

均衡配分ならば最大重みマッチング（1）

命題： α^* は均衡配分

➔ α^* に対応するマッチングは最大重み

［証明の概略］

最大重みマッチング（に対応する配分） $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ に対し，

α の重み ≦ α^* の重み ①

を示せばよい．以下では，α^*, α 共にすべての入札者に財の割当がある場合のみ考える

➔ α^* の重み= $\sum_{i \in B} v\big(i, \alpha^*(i)\big)$, α の重み= $\sum_{i \in B} v\big(i, \alpha(i)\big)$ と書ける

$S^* = \{\alpha^*(i) | i \in B\}$, $S = \{\alpha(i) | i \in B\}$ とおく.

α^* は均衡配分➔ある財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が存在して

配分 α^* と価格 p のペアはワルラス均衡

$$v\big(i, \alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) \geq v(i, h) - p(h) \ (\forall h \in N) \quad ②$$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S^*) \quad ③$$

均衡配分ならば最大重みマッチング（2）

（証明のつづき）

② より，各入札者 i に対し

$$v\big(i,\alpha^*(i)\big)-p\big(\alpha^*(i)\big)\geq v\big(i,\alpha(i)\big)-p\big(\alpha(i)\big)$$

$$\therefore \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big)\geq \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha(i)\big)+\sum_{i\in B} p\big(\alpha^*(i)\big)-\sum_{i\in B} p\big(\alpha(i)\big)$$

$$\sum_{i\in B} p\big(\alpha^*(i)\big)-\sum_{i\in B} p\big(\alpha(i)\big)=\sum_{j\in S^*\setminus S} p(j)-\sum_{j\in S\setminus S^*} p(j)\geq 0$$

（∵価格の非負性と③）

よって，　$\sum_{i\in B} v\big(i,\alpha^*(i)\big)\geq \sum_{i\in B} v\big(i,\alpha(i)\big)$

最大重みマッチングならば均衡配分（1）

命題： α は最大重みマッチング ➔ α は均衡配分

［証明の概略］

α^* は均衡配分，p は均衡価格とする

➔ 直前の命題より，α^* も最大重みマッチング

α と p が均衡の条件を満たすことを示す．

以下では，α^*, α 共にすべての入札者に財の割当がある場合のみ考える

$S^* = \{\alpha^*(i) | i \in B\}$,　$S = \{\alpha(i) | i \in B\}$　とおく．

α^* と p は均衡なので，

$$v\big(i, \alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big) = \max_{h \in N}\{v(i,h) - p(h)\} \quad ①$$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S^*) \quad ②$$

α と p が均衡である ⬅➡ 以下の2条件を満たす

$$v\big(i, \alpha(i)\big) - p\big(\alpha(i)\big) = v\big(i, \alpha^*(i)\big) - p\big(\alpha^*(i)\big)$$

$$p(j) = 0 \quad (\forall j \in N \setminus S)$$

これらを示す

最大重みマッチングならば均衡配分（2）

①より，　$v\big(i,\alpha^*(i)\big)-p\big(\alpha^*(i)\big)\geq v\big(i,\alpha(i)\big)-p\big(\alpha(i)\big)$　③

②と価格の非負性より

$p(j)=0\quad\big(\forall j\in N\setminus(S^*\cup S)\big)$ ④　　$p(j)\geq 0\quad(\forall j\in S^*\setminus S)$ ⑤

「均衡配分ならば最大重みマッチング」の証明と同様にして，

③，④，⑤より　　$\sum_{i\in B}v\big(i,\alpha^*(i)\big)\geq\sum_{i\in B}v\big(i,\alpha(i)\big)$

ここで，③と⑤の不等式の1つでも“>”で成り立つと

$$\sum_{i\in B}v\big(i,\alpha^*(i)\big)>\sum_{i\in B}v\big(i,\alpha(i)\big)$$

となり，α^* が最大重みマッチングであることに矛盾．

∴ ③と⑤の不等式のいずれも“=“で成立

∴ α と p が均衡であるための2条件が成立　■

双対問題の定式化

最小化	$\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$	
条件	$q(i) + p(j) \geq v(i,j)$	$(\forall i \in B, \forall j \in N)$
	$q(i) \geq 0$	$(\forall i \in B)$
	$p(j) \geq 0$	$(\forall j \in N)$

双対問題の最適解の性質

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

命題: q, p が最適解ならば $q(i) = \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right]$

（証明）各変数 q(i) はなるべく小さくしたい

- $q(i) \geq v(i,j) - p(j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$
- $q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

∴ q, p が最適解ならば $q(i) = \max\left[0, \max_{1 \leq h \leq n} \{v(i,h) - p(h)\}\right]$ ■

双対最適解と均衡価格の関係

双対問題の最適解 ＝ 均衡価格

定理1： 任意の価格ベクトル p に対し,
p は均衡価格
➔ q(i) (i∈B) を $q(i) = \max\left[0, \max_{1 \le h \le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$ により定義すると, (q,p) は最適解

定理2： 任意の双対問題の実行可能解 (q,p) に対し,
(q,p) は最適解 ➔ p は均衡価格

定理1の証明(1)

- p: 均衡価格　とする.
- $q(i) = \max\left[0, \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$　とおく.
- (p,q) は双対問題の実行可能解　(∵ q(i) の定義より)
- 双対問題の任意の実行可能解(p',q') に対して, 以下を示す:

$$\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) \le \sum_{i\in B} q'(i) + \sum_{j\in N} p'(j)$$

- p は均衡価格 ➔ ある財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在して

(i) 入札者 i に財 j が割り当てられる($\alpha(i) = j$)
➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}$
(ii) 入札者 i に財の割り当てがない($\alpha(i) = 0$)
➔ $\max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\} \le 0$
(iii) 財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p(j) = 0$

定理1の証明(2)

- 配分 α において

  B*=財の割当のある入札者の集合 = $\{i_1, i_2,\ldots,i_k\}$,

  N*=誰かに割り当てられた財の集合 = $\{j_1, j_2,\ldots,j_k\}$,

  ただし i_t に j_t が割り当てられたとする.

➔ 均衡条件(i)と q の定義より, $q(i_t) + p(j_t) = v(i_t, j_t)$

  均衡条件(ii)と q の定義より, $q(i) = 0 \quad (i \in B\text{-}B^*)$,

  均衡条件(iii)より, $p(j) = 0 \quad (j \in N\text{-}N^*)$

$$\therefore \sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) = \sum_{t=1}^{k}(q(i_t) + p(j_t)) = \sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t)$$

定理1の証明(3)

- (p',q') は双対問題の実行可能解

$$\therefore\ q'(i) + p'(j) \geq v(i,j) \qquad (\forall i \in B, \forall j \in N)$$

$$q'(i) \geq 0 \qquad (\forall i \in B)$$

$$p'(j) \geq 0 \qquad (\forall j \in N)$$

$$\therefore \sum_{i \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j)$$

$$= \sum_{t=1}^{k} (q'(i_t) + p'(j_t)) + \sum_{i \in B - B^*} q'(i) + \sum_{j \in N - N^*} p'(j)$$

$$\geq \sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t) = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) \qquad \blacksquare$$

定理2の証明(1)

- (p',q'): 双対問題の任意の最適解
- p: 均衡価格，α:対応する均衡配分

$$q(i) = \max\left[0, \max_{1\le h\le n}\{v(i,h) - p(h)\}\right]$$ とする

➔ 定理1より (p, q) は双対問題の最適解

以下では，p' と α が均衡の条件を満たすことを示す.

- 定理1の証明より

$$\sum_{i\in B} q(i) + \sum_{j\in N} p(j) \le \sum_{i\in B} q'(i) + \sum_{j\in N} p'(j) \quad ①$$

これを示すのに用いた不等式:

$$q'(i_t) + p'(j_t) \ge v(i_t, j_t) \qquad (t = 1,2,\dots,k) \quad ②$$

$$q'(i) \ge 0 \qquad (\forall i \in B - B^*) \quad ③$$

$$p'(j) \ge 0 \qquad (\forall j \in N - N^*) \quad ④$$

定理2の証明(2)

- 不等式②, ③, ④のいずれかが “>” で成立 ➔ ①が “>” で成立

➔ (p’,q’)は最適解ではない(矛盾)

- よって, 不等式②, ③, ④のいずれも “=” で成立
- ②の等式より, 各 t に対し,

$$v(i_t, j_t) - p'(j_t) = q'(i_t) = \max[0, \max_h\{v(i_t, h) - p'(h)\}]$$

(不等号は $q'(i) \geq 0$, $q'(i) + p'(j) \geq v(i,j)$ より)

- ③の等式より, 財の割当のない入札者 i∈B-B* に対し,

$$0 = q'(i) \geq \max_h\{v(i,h) - p'(h)\}$$

(不等号は $q'(i) + p'(j) \geq v(i,j)$ より)

- ④の等式より, 財 j が誰にも割り当てられない ➔ $p'(j) = 0$

∴ p’ と α は均衡の条件を満たす

最大重みマッチング問題と
その双対問題に対する双対定理

双対問題の定式化

最小化 $\sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

条件 $q(i) + p(j) \geq v(i,j) \quad (\forall i \in B, \forall j \in N)$

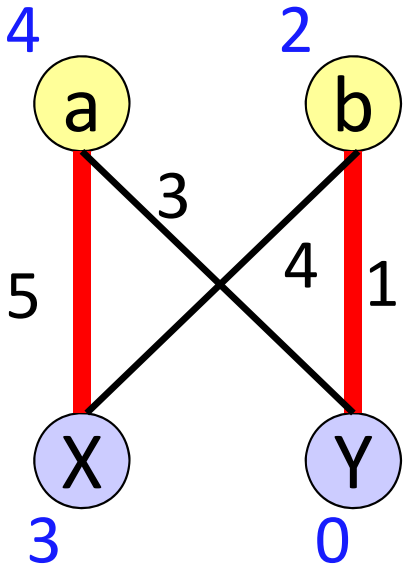
$q(i) \geq 0 \quad (\forall i \in B)$

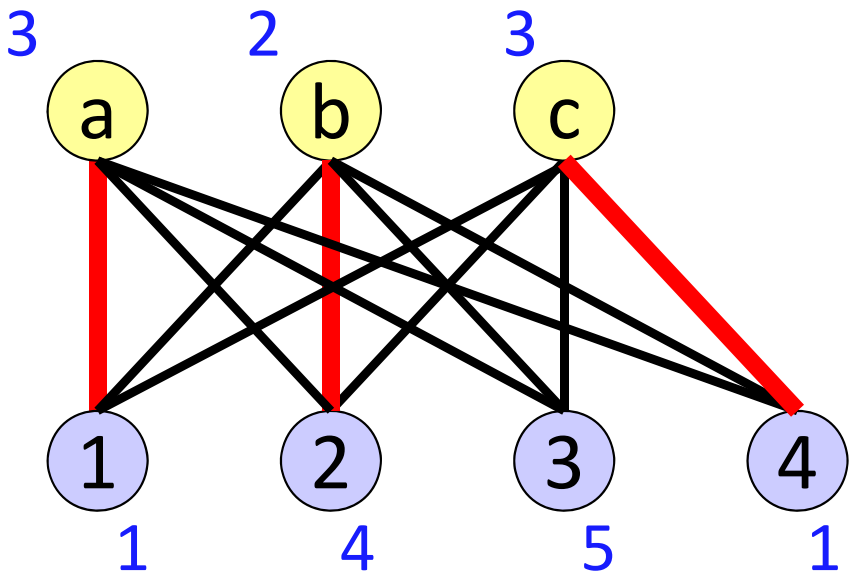
$p(j) \geq 0 \quad (\forall j \in N)$

弱双対定理

最大重みマッチング問題の最適値 ≦ 双対問題の最適値

定理:
任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し,
マッチング M の重み $\leqq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

系: 任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) は,
以下の条件を満たすとき, それぞれ最適解である:
マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

弱双対定理:証明

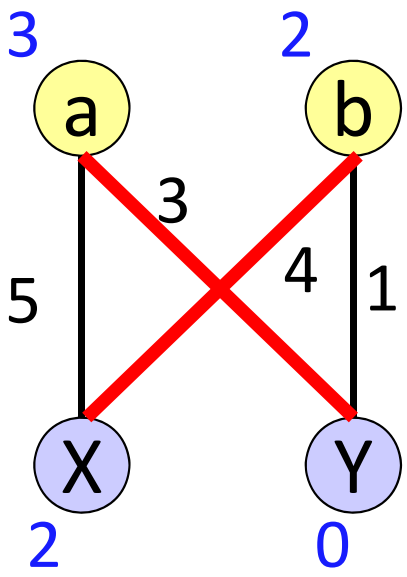
定理:
任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し,
マッチング M の重み $\leqq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

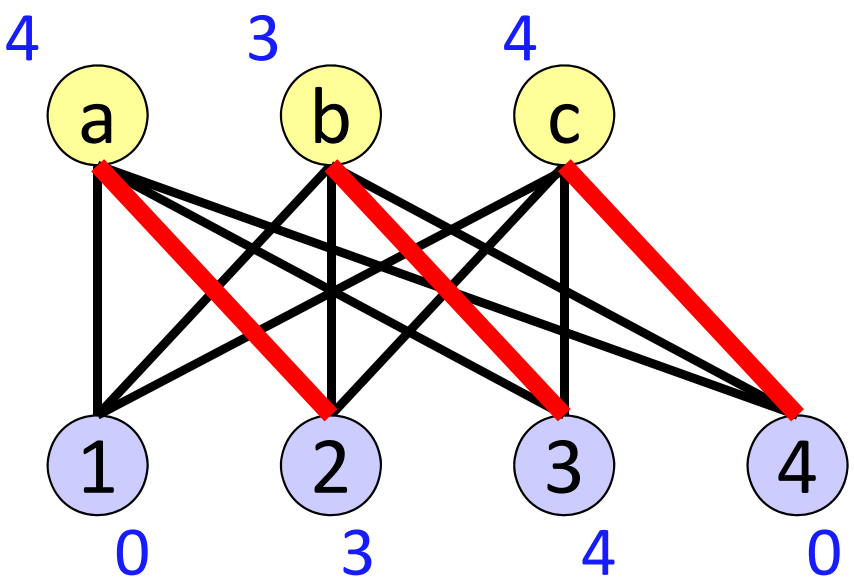
（証明）マッチングの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k)$ とすると,
双対問題の実行可能性より $v(i_t, j_t) \geq q(i_t) + p(j_t)$ $(t = 1,2, \ldots, k)$
マッチング M の重み$=\sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t) \geq \sum_{t=1}^{k} q(i_t) + \sum_{t=1}^{k} p(j_t)$
$i_1, i_2, \ldots, i_k$ は B に含まれる，互いに異なる要素であるので,
$\sum_{t=1}^{k} q(i_t) \leq \sum_{i \in B} q(i)$.
同様に，$\sum_{t=1}^{k} p(j_t) \leq \sum_{j \in N} p(j)$.
よって，マッチング M の重み $\leqq \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$ が成り立つ.

最大重みマッチングの最適性条件

双対問題の実行可能解を用いた最適性条件

定理: 二部グラフのマッチング M は最大重み
←→ 双対問題の実行可能解(q,p)で,
次の条件を満たすものが存在:
マッチング M に含まれる任意の枝に対し, q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない → q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない → p(j)=0



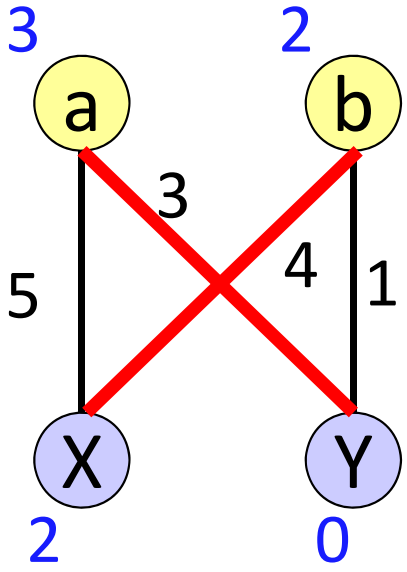


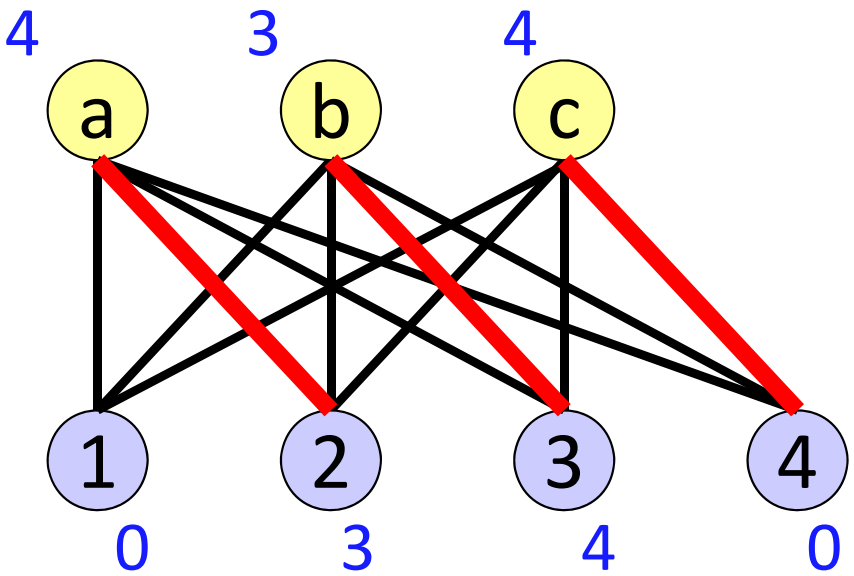
v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

相補性定理

最大重みマッチング問題と双対問題の実行可能解が最適解であるための必要十分条件

定理:
任意のマッチング M と双対問題の任意の実行可能解 (q,p) に対し，
M は最大重みマッチング，かつ(q,p)は双対問題の最適解
⟷ 以下の条件が成立:
マッチング Mに含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0



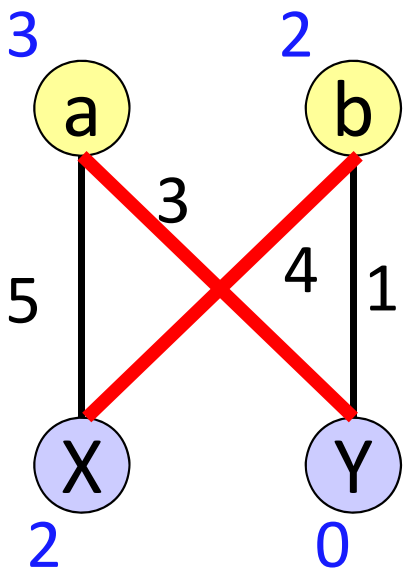


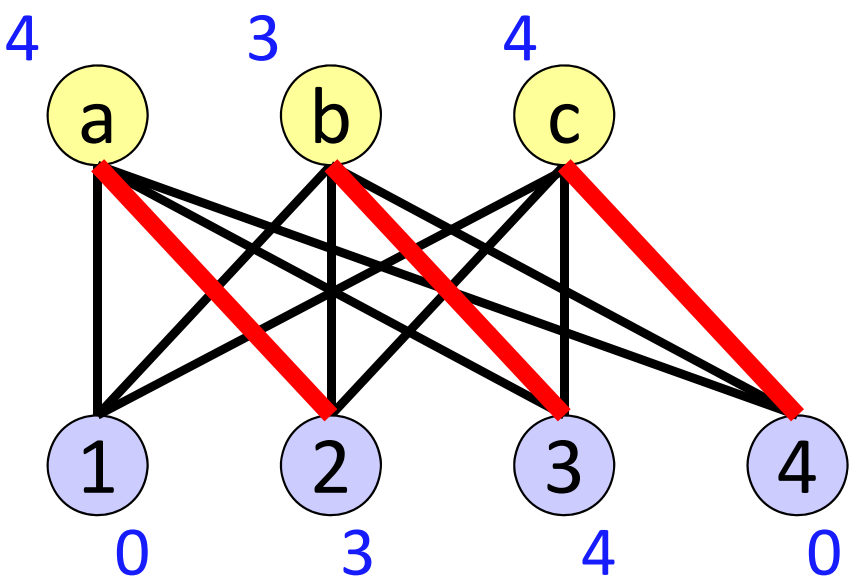
v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

双対定理

最大重みマッチング問題と双対問題の最適値は一致

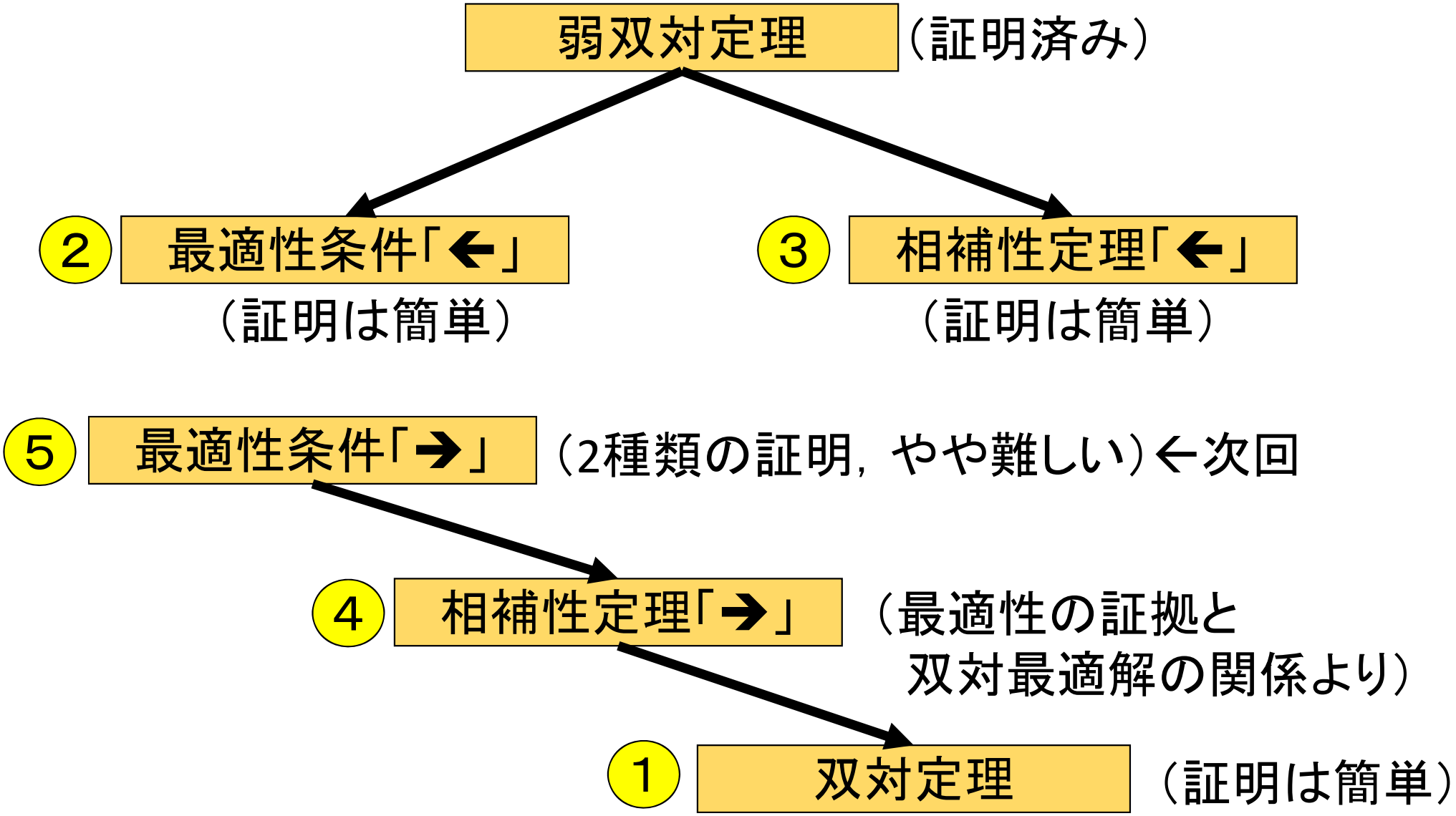
定理:
最大重みマッチング M と双対問題の最適解 (q,p) に対し,
マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$





v(i,j)	a	b	c
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8
④	0	0	4

定理の証明の流れ


弱双対定理
（証明済み）
2
最適性条件「←」
（証明は簡単）
3
相補性定理「←」
（証明は簡単）
5
最適性条件「→」
（2種類の証明，やや難しい）←次回
4
相補性定理「→」
（最適性の証拠と
双対最適解の関係より）
1
双対定理
（証明は簡単）

① 相補性定理「➔」を使った双対定理の証明

定理:
最大重みマッチング M と双対問題の最適解 (q,p) に対し,
マッチング M の重み $= \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$

M は最大重みマッチング，かつ(q,p)は双対問題の最適解とする.
Mの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k)$ とする.
相補性定理「➔」より，以下の条件が成立:

- $v(i_t, j_t) = q(i_t) + p(j_t)$ $(t = 1,2, \ldots, k)$
- $q(i) = 0$ $(\forall i \in B \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\})$
- $p(j) = 0$ $(\forall j \in N \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_k\})$

よって，マッチングMの重み$= \sum_{t=1}^{k} v(i_t, j_t)$

$$= \sum_{t=1}^{k} q(i_t) + \sum_{t=1}^{k} p(j_t) = \sum_{j \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

② 最適性条件「←」の証明

弱双対定理の系を使って証明する.

Mはマッチングとする.

以下の条件を満たす双対問題の実行可能解 (q,p) が存在すると仮定:

- マッチング Mに含まれる任意の枝に対し, q(i)+p(j) = v(i,j)
- i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
- j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

M は最大重みマッチング（かつ (q,p)は双対問題の最適解）

であることを証明する.

弱双対定理の系より, 以下の式を示せば良い:

$$\text{マッチング M の重み} = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

この式は双対定理の証明と同様に示せる.

③ 相補性定理「←」の証明

弱双対定理の系を使って証明する.

マッチング M と双対問題の実行可能解 (q,p) に対し,
以下の条件を仮定

- マッチング Mに含まれる任意の枝に対し, q(i)+p(j) = v(i,j)
- i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
- j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

M は最大重みマッチング, かつ
(q,p)は双対問題の最適解であることを証明する.

弱双対定理の系より, 以下の式を示せば良い:

$$\text{マッチング M の重み} = \sum_{i \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j)$$

この式は双対定理の証明と同様に示せる.

④ 最適性条件の定理「➔」を使った相補性定理「➔」の証明

M は最大重みマッチング，かつ(q,p)は双対問題の最適解と仮定.

以下の条件が成立することを示す：

- マッチング Mに含まれる任意の枝に対し，q(i)+p(j) = v(i,j)
- i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q(i)=0
- j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p(j)=0

最適性条件の定理「➔」より，

以下の条件を満たす双対問題の実行可能解(q’,p’)が存在：

- マッチング Mに含まれる任意の枝に対し，q’(i)+p’(j) = v(i,j)
- i∈B にマッチング M の枝が接続していない ➔ q’(i)=0
- j∈N にマッチング M の枝が接続していない ➔ p’(j)=0

④ 最適性条件の定理「➔」を使った相補性定理「➔」の証明（続き）

Mの枝集合を $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \cdots, (i_k, j_k)$ とする ➔

- $v(i_t, j_t) = q'(i_t) + p'(j_t)\ (t = 1,2, \dots, k)$
- $q'(i) = 0\ \ (\forall i \in B \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\})$
- $p'(j) = 0\ \ (\forall j \in N \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\})$

このとき，(q,p)は双対問題の実行可能解なので，

① $q(i_t) + p(j_t) \geq v(i_t, j_t) = q'(i_t) + p'(j_t)\ (t = 1,2, \dots, k)$

② $q(i) \geq q'(i) = 0\ \ (\forall i \in B \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\})$

③ $p(j) \geq p'(j) = 0\ \ (\forall j \in N \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_k\})$

これらの不等式より，(q,p)の目的関数値について以下が成り立つ:

④ $\sum_{j \in B} q(i) + \sum_{j \in N} p(j) \geq \sum_{j \in B} q'(i) + \sum_{j \in N} p'(j)$

一方，(q,p)は双対問題の最適解　∴④は等号で成り立つ

∴①，②，③も等号で成り立つ．つまり，(q,p)は所望の条件を満たす．

演習問題

問： 入札者{A,B}, 財{1,2,3}の場合において,
均衡配分が最大重みマッチングになることを以下の手順で証明せよ.
なお，入札者 X の財 j に対する評価値は v(X, j) とする.

(1) 両方の入札者に財が割り当てられるような均衡配分が存在することを証明せよ.

(2) 両方の入札者に財が割り当てられるような最大重みマッチングが存在することを証明せよ.

一般性を失うことなく,
均衡配分ではAに財1，Bに財2が割り当てられると仮定する.

(3) この配分に対する，均衡条件を書け

(4) 任意の配分 $\alpha(A), \alpha(B) \in \{1,2,3\}, \alpha(A) \neq \alpha(B)$ に対し,
$v\big(A, \alpha(A)\big) + v\big(B, \alpha(B)\big) \leq v(A, 1) + v(B, 2)$ が成り立つことを示せ.