数理経済学特講

複数財オークションのアルゴリズムと離散最適化

第3回　二部グラフのマッチング

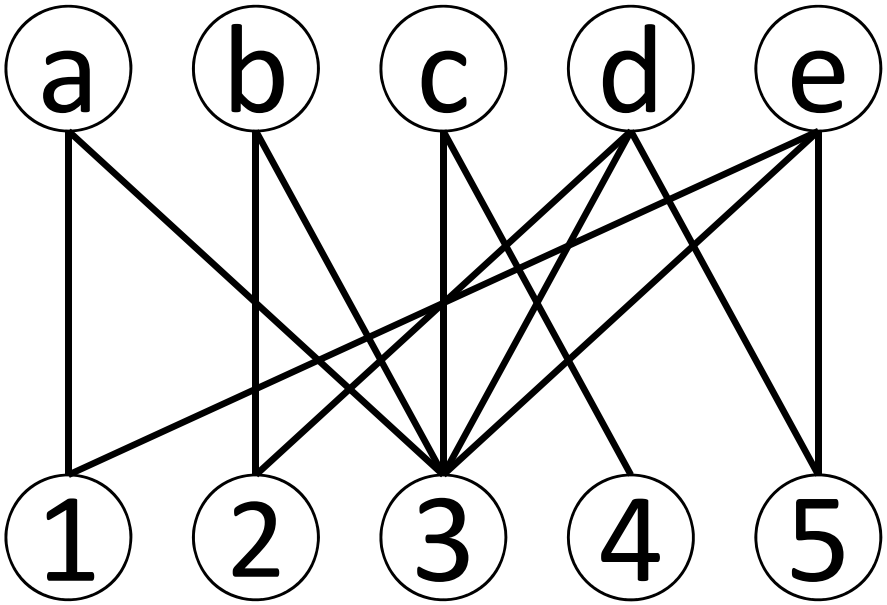
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系 准教授
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

二部グラフのマッチング

二部グラフとマッチング問題

- （グラフ理論における）マッチング問題：
  「ひと」や「もの」の間の最適なペアの集合を求める問題
- 例：入札者への財の割り当て
  - 5人の入札者 B={a, b, c, d, e}　5つの財 N={1, 2, 3, 4, 5}
  - 各々の入札者は欲しい財と欲しくない財がある
    ➔ グラフで表現可能

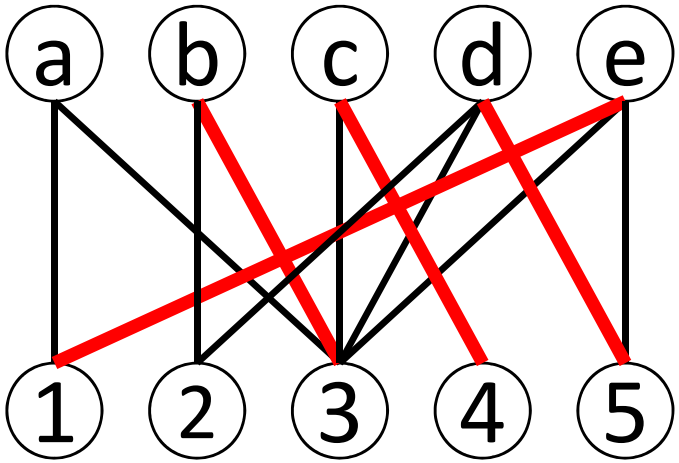
頂点の2つのグループ
B と N の間にのみ，枝が存在
🡐 二部グラフと呼ばれる

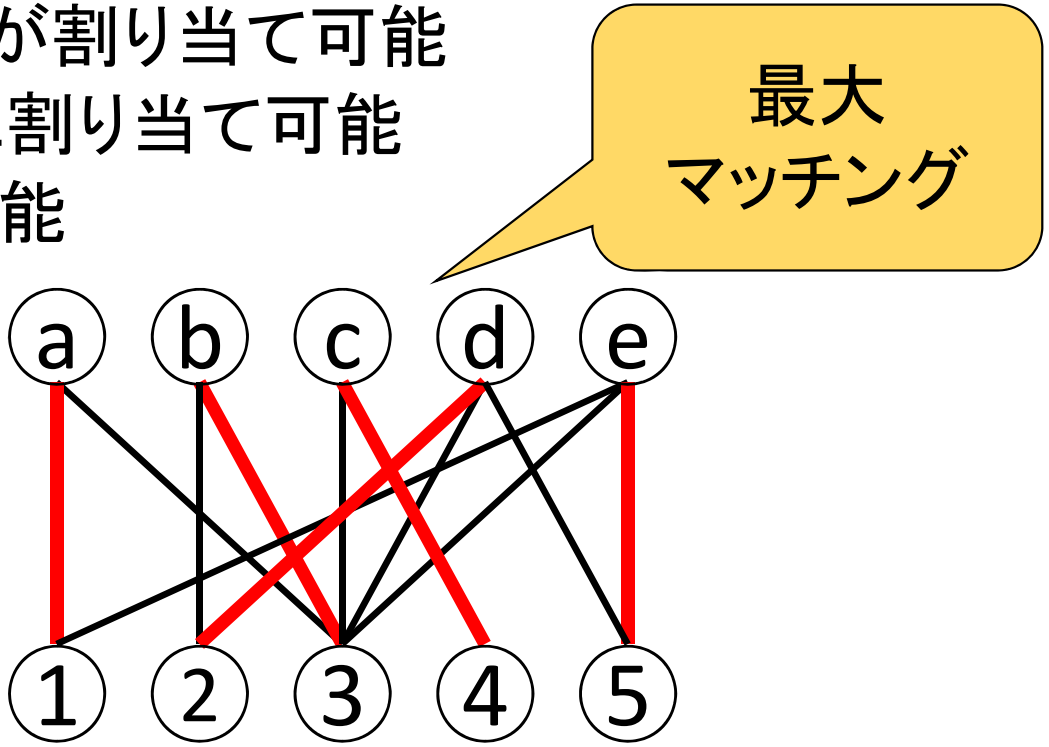


※2部グラフにおいて，B と N の頂点数は同じでなくても良い

二部グラフのマッチング

- できるだけ多くの入札者に財を割り当てたい
  - 各入札者には，高々1つの財が割り当て可能
  - 各財は，高々一人の入札者に割り当て可能
  - ➔ 財の割当を枝集合で表現可能

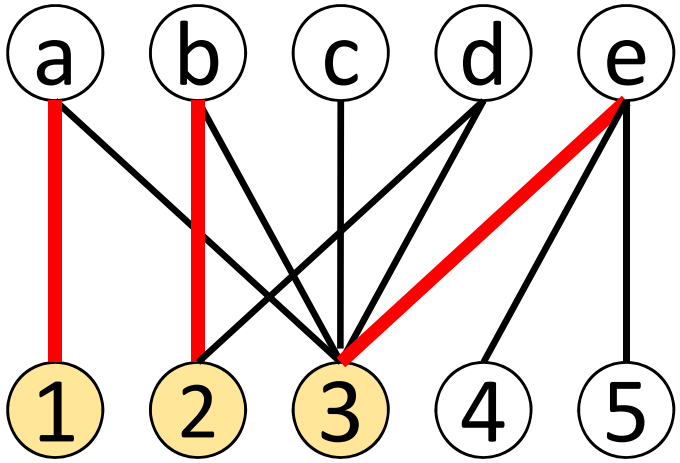


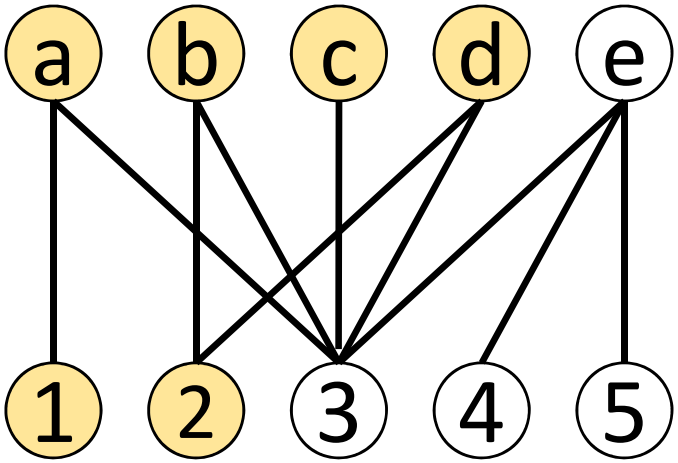


- （グラフの）マッチング：
  グラフの枝集合であって，各頂点に接続する枝の数（次数）が1以下
- 最大（サイズ）マッチング問題：← よく知られた問題
  与えられたグラフのマッチングの中で，枝数最大のものを求める

被覆制約つきマッチング問題

- 指定された頂点を全てカバーするマッチングの有無を判定
  - 存在する場合は，そのようなマッチングを求めたい





片側被覆制約：
{1,2,3}をカバーする
マッチングは存在する

両側被覆制約：
{a,b,c,d},{1,2}をカバーする
マッチングは存在しない

後述するように，

- 両側被覆制約の問題 → ２つの片側被覆制約の問題に帰着可能
- 片側被覆制約の問題は，

  最大マッチング問題と同様に解くことが可能

応用：均衡価格の判定（その1）

- 複数不可分財のオークションにおいて，
  与えられた財の価格が均衡価格か否かを判定したい

定義：財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は **均衡価格**
← → 以下の条件を満たす財の配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ が存在
ただし $q(i) \equiv \max_{1 \le h \le n} \{v(i,h) - p(h)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）
→ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$
② 入札者 i に財の割り当てがない（$\alpha(i) = 0$） → $q(i) \le 0$
③ 財 j が誰にも割当られない → $p(j) = 0$

- 条件②，③は対偶をとると わかりやすい

②’ 入札者 i に財の割り当てがある（$\alpha(i) \ne 0$） ← $q(i) > 0$
③’ 財 j は誰かに割り当てられる ← $p(j) > 0$

応用：均衡価格の判定（その2）

マッチングを用いて，均衡価格の定義の書き換えが可能

（書き換え後の）定義：財の価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ は 均衡価格

⇔ 枝集合 E の二部グラフにおいて，

頂点集合 B′∪N′ をカバーするマッチングが存在

$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}$, $N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\}$,

$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$

① 入札者 i に財 j が割り当てられる（$\alpha(i) = j$）

➔ $0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)$

②′ 入札者 i に財の割り当てがある（$\alpha(i) \neq 0$）← $q(i) > 0$

③′ 財 j は誰かに割り当てられる ← $p(j) > 0$

マッチングの枝は
Eに含まれる

マッチングは
B′をカバーする

マッチングは
N′をカバーする

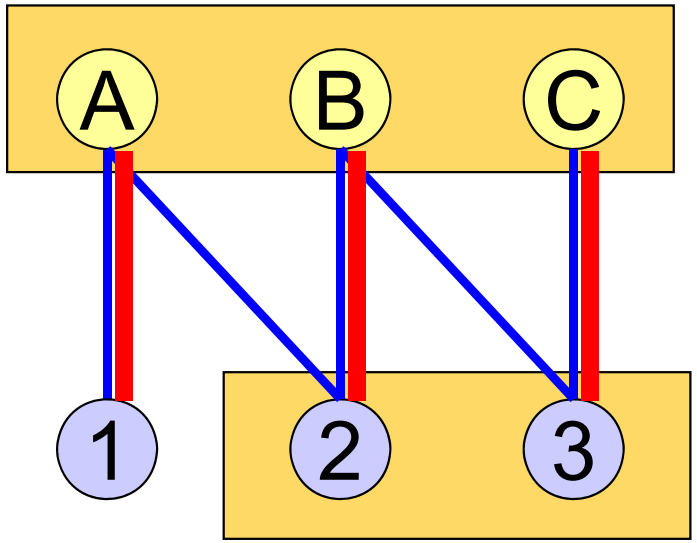
具体例 その1

価格p(j)
0
3
2

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

最大利得 q(i)　3　2　2

B'={A,B,C}, N'={2,3}
E={(A,1), (A,2), (B,2), (B,3), (C,3)}



枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B' ∪ N' をカバーする
マッチングが存在する
∴ この価格は均衡価格である

（このマッチングは均衡配分）

具体例 その2

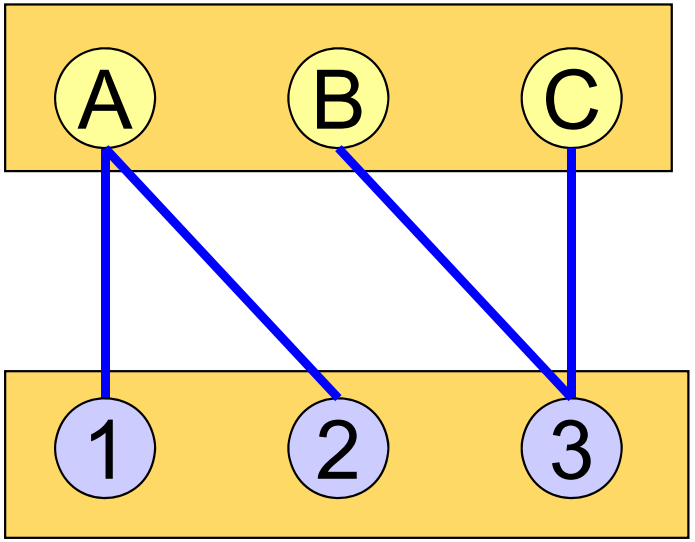
価格p(j)
2
5
3

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	1
②	6	5	3
③	2	4	4

最大利得 q(i)　1　1　1

B'={A,B,C}, N'={1, 2,3}
E={(A,1), (A,2), (B,3), (C,3)}

枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B' ∪ N' をカバーする
マッチングが存在しない
∴ この価格は均衡価格ではない



応用: 均衡配分の計算

均衡価格 $p(j) \in \mathbb{R}_+$ が既知のとき,
均衡配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ を求めたい

均衡配分の条件:指定頂点をカバーするマッチング

配分 $\alpha(i) \in N \cup \{0\}$ は均衡配分
←→ 対応するマッチングは
頂点集合 B∪N, 枝集合 E の二部グラフにおいて,
頂点集合 B′∪N′ をカバーするマッチング

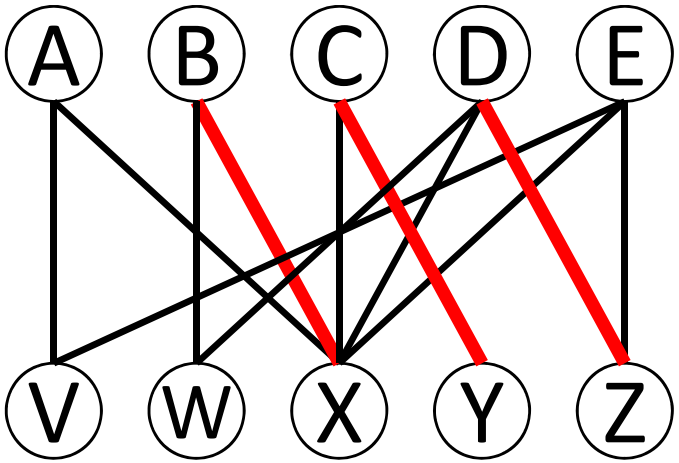
$$B' \equiv \{i \in B \mid q(i) > 0\}, \qquad N' = \{j \in N \mid p(j) > 0\},$$
$$E = \{(i,j) \mid i \in B, j \in N,\ 0 \le v(i,j) - p(j) = q(i)\}$$

マッチングと交互路

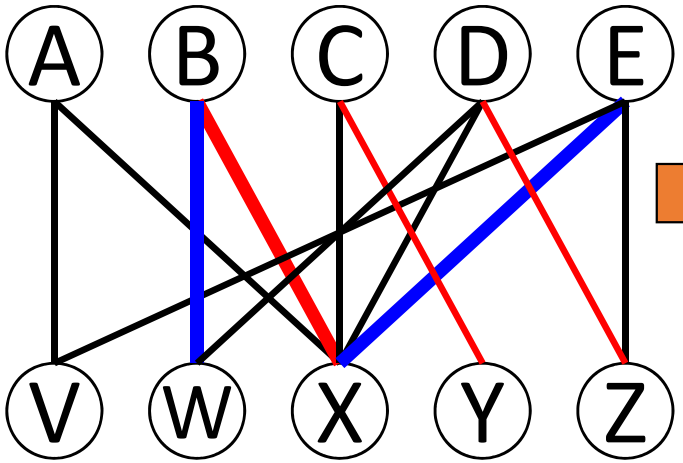
マッチングに関する交互路

交互路 – 新しいマッチングを作るための「道具」

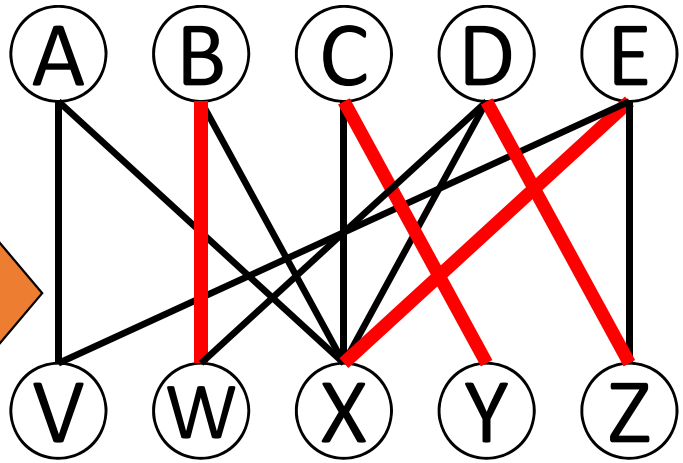
定義：マッチング Mに関する交互路
(i) Mの枝とM以外の枝が交互に現れる路
(ii) 路の最初の枝がM以外➔路の始点は，Mの枝の端点ではない
(iii) 路の最後の枝がM以外➔路の終点は，Mの枝の端点ではない



マッチング M



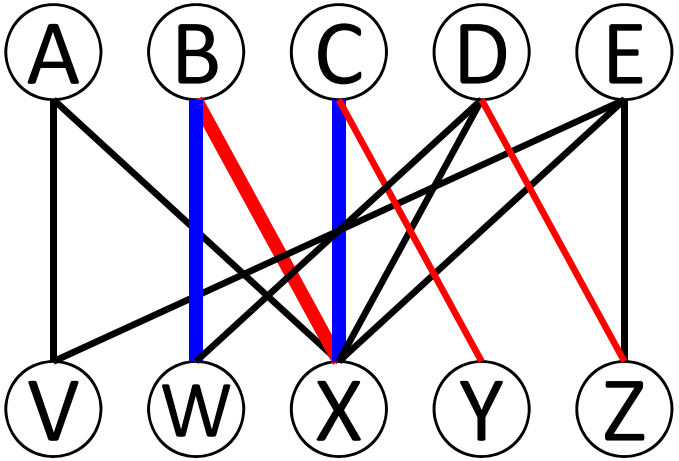
交互路

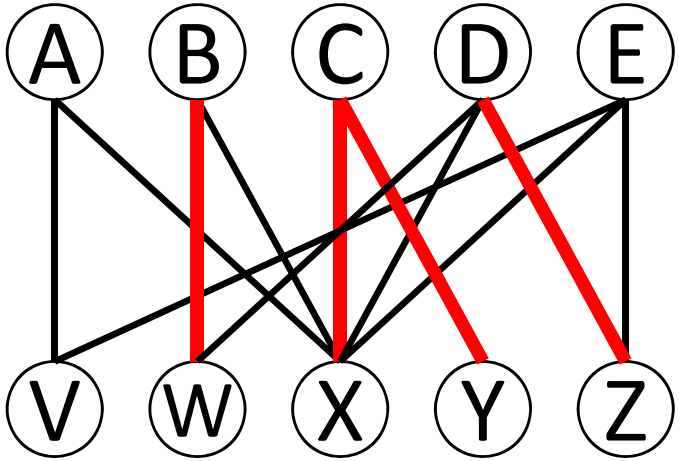


交互路を使って，
マッチングの枝を
入れ替えした結果

マッチングに関する交互路

交互路でない例

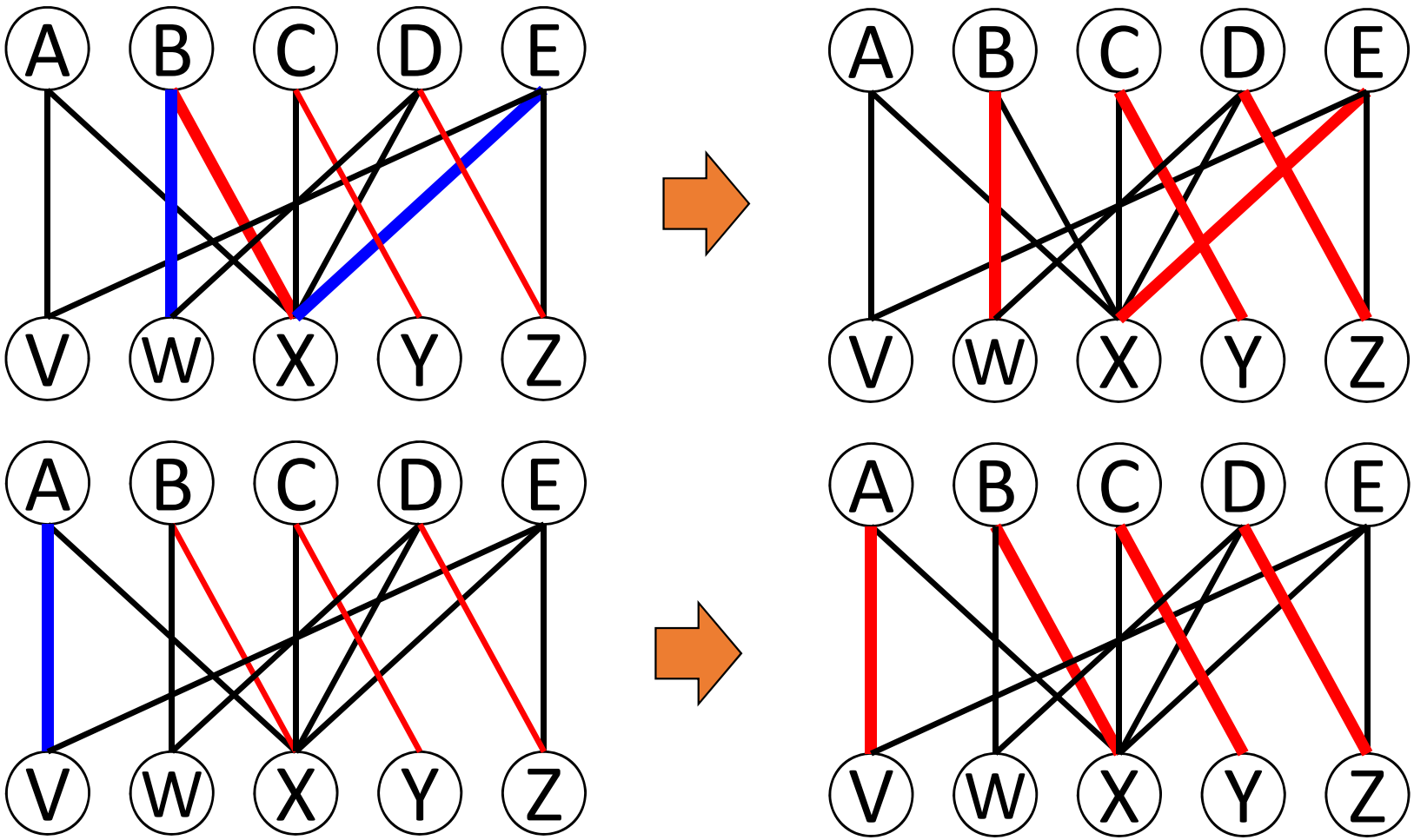




条件(ii)を満たさない
➔枝を入れ替えても
　マッチングにならない

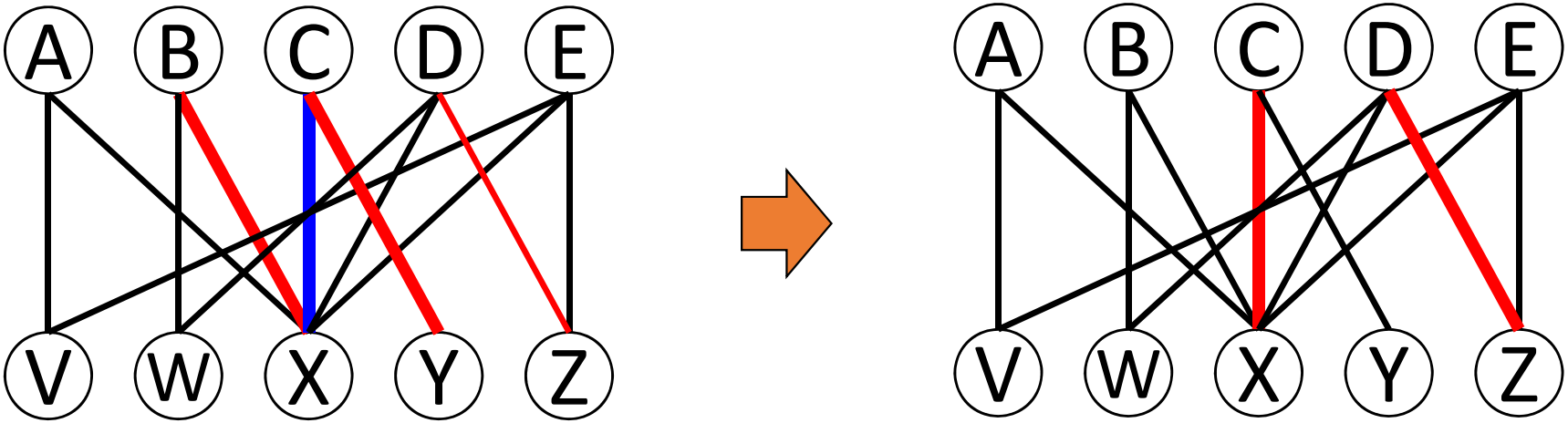
マッチングに関する交互路

交互路タイプ1：M以外の枝数＝Mの枝数＋1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1増える）
➔ 増加路と呼ばれる

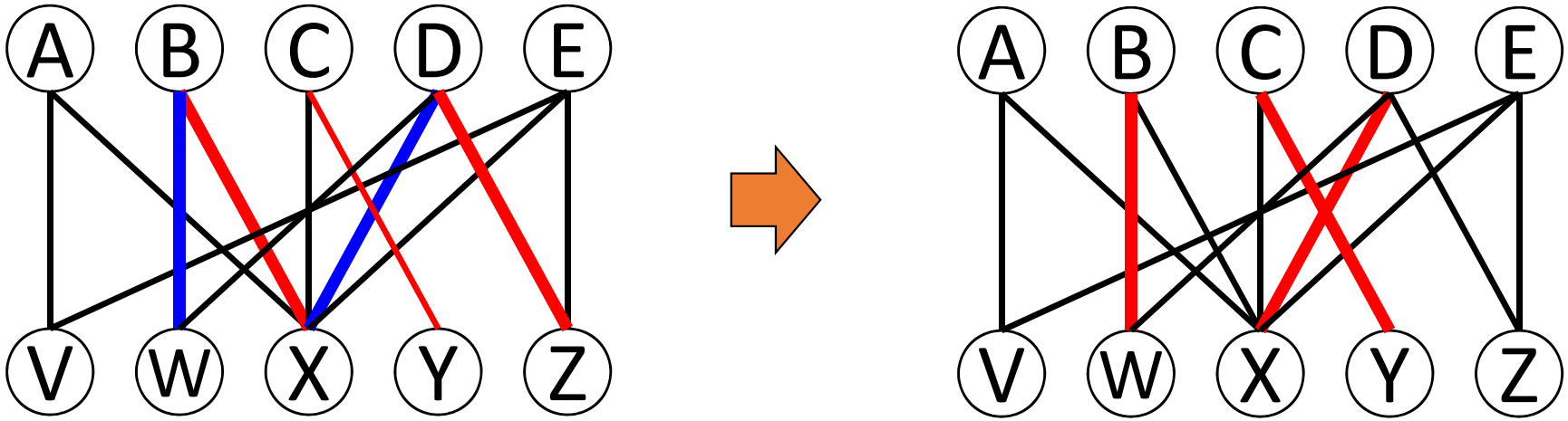


マッチングに関する交互路

交互路タイプ2：M以外の枝数＝Mの枝数−1
（枝を入れ替えるとマッチングの枝数が1減る「減少路」）



交互路タイプ3：M以外の枝数＝Mの枝数
（枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変）

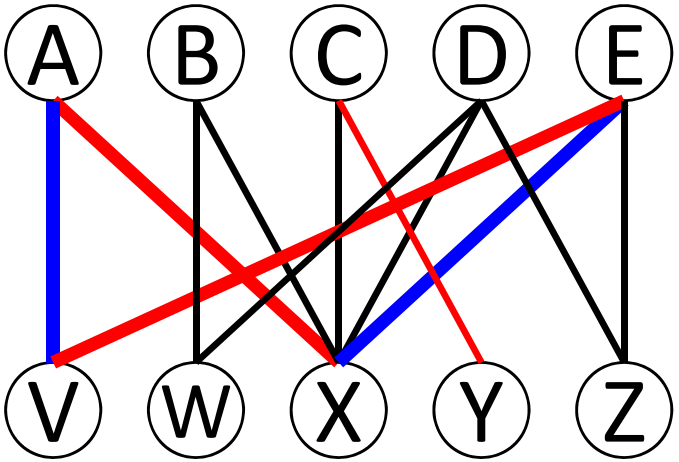


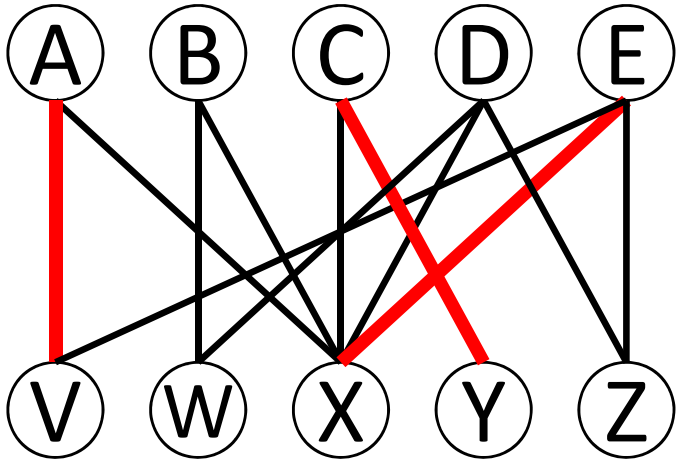
マッチングに関する交互閉路

定義：マッチング Mに関する**交互閉路**
＝Mの枝とM以外の枝が交互に現れる閉路

交互閉路では，「M以外の枝数＝Mの枝数」
➔枝を入れ替えても，マッチングの枝数は不変

交互閉路の例

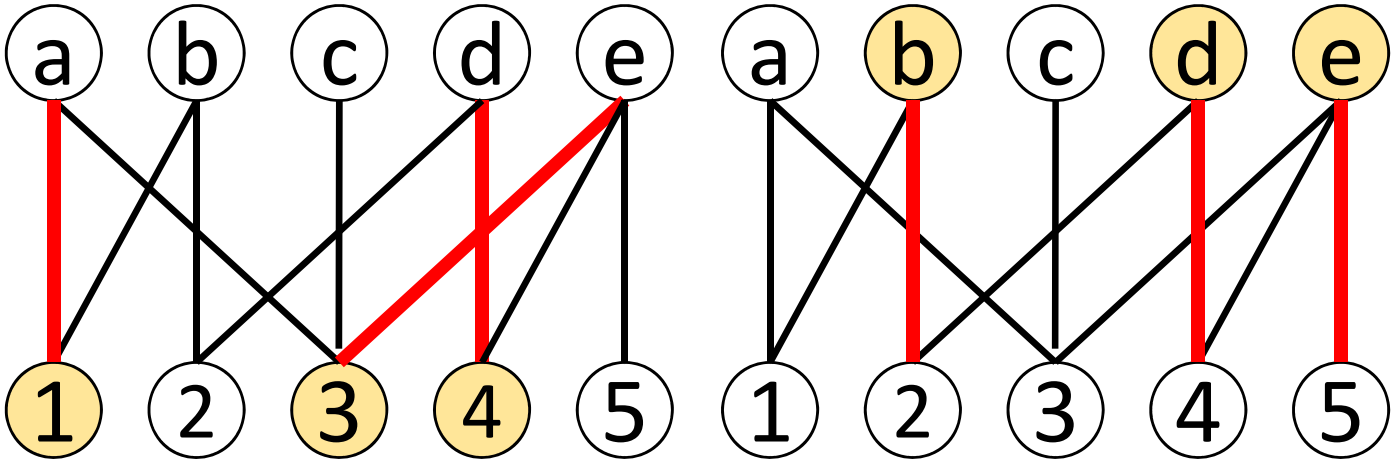




指定頂点をカバーするマッチング

片側被覆制約と両側被覆制約の関係

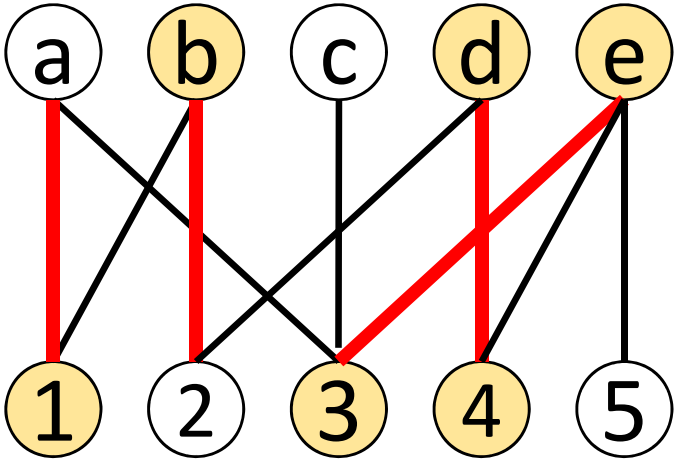
命題　B’ ⊆ B および N’ ⊆ N に対し,
B’ をカバーするマッチング,
　および N’ をカバーするマッチングがそれぞれ存在
➔B’ と N’を同時にカバーするマッチングが存在



{b,d,e},{1,3,4} を
カバーする
マッチング

N’={1,3,4} を
カバーする
マッチング

B’={b,d,e} を
カバーする
マッチング

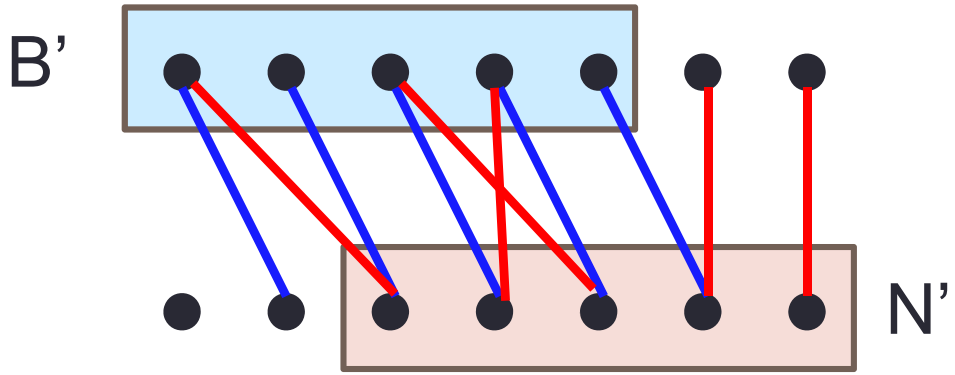


片側被覆制約と両側被覆制約の関係

命題　B’ ⊆ B および N’ ⊆ N に対し，
B’ をカバーするマッチング，
　　および N’ をカバーするマッチングがそれぞれ存在
　➔B’ と N’を同時にカバーするマッチングが存在

[証明]

- M: B’ をカバーするマッチング
　　M の各枝の端点の一方は B’ に含まれると仮定してよい
- L: N’ をカバーするマッチング
　　L の各枝の端点の一方は N’ に含まれると仮定してよい
- M, L の枝のみを用いて，B’ と N’を同時にカバーする
　マッチングを作る



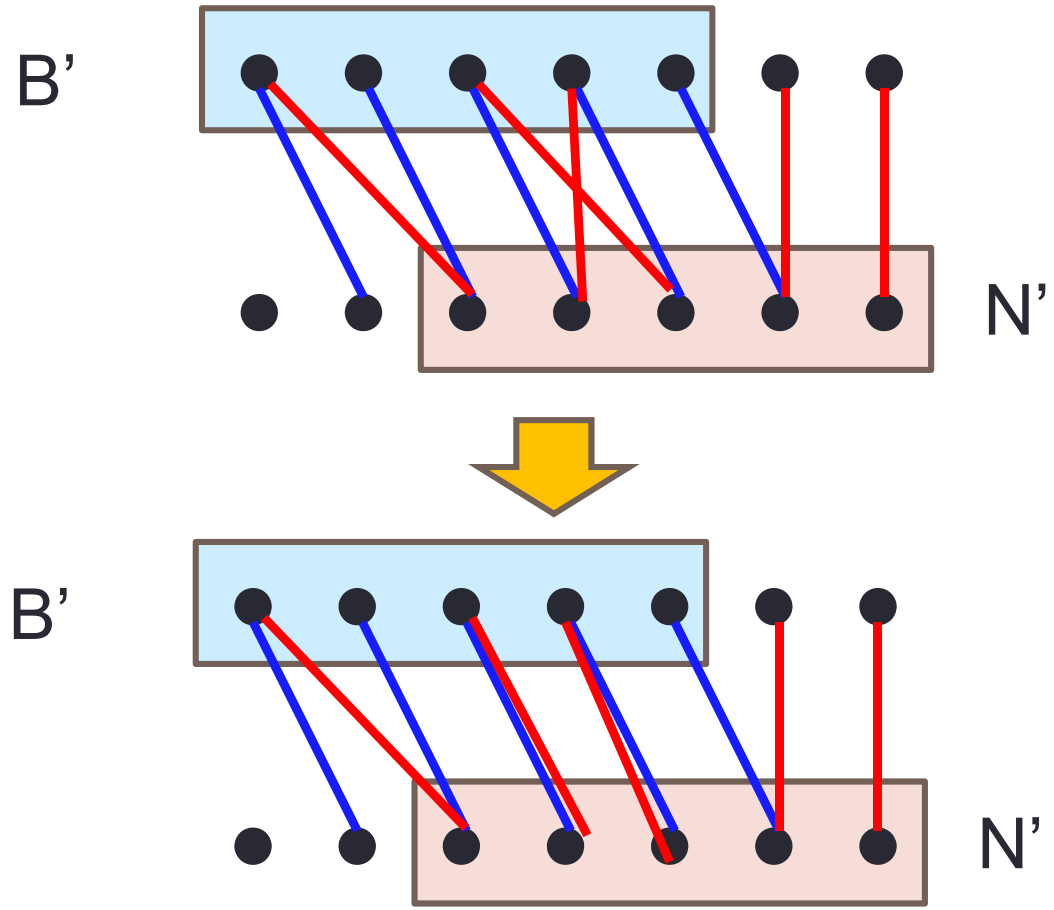
証明: 交互閉路の扱い

枝集合 M∪L からなるグラフ → 交互路と交互閉路に分解できる

交互閉路 C が存在する場合

L∩C の枝をM∩Cの枝に置き換えても，L は N' をカバーする

∴ 交互閉路は存在しない
と仮定して良い



証明: 枝数奇数の交互路の扱い

枝数が奇数の交互路 P が存在する場合

$|M \cap P| = |L \cap P| + 1$ の場合のみ考える.

（ $|L \cap P| = |M \cap P| + 1$ の場合は同様）

マッチング L の仮定より,

$L \cap P$ の枝の下側端点は N' に含まれる

これらの端点は $M \cap P$ によっても

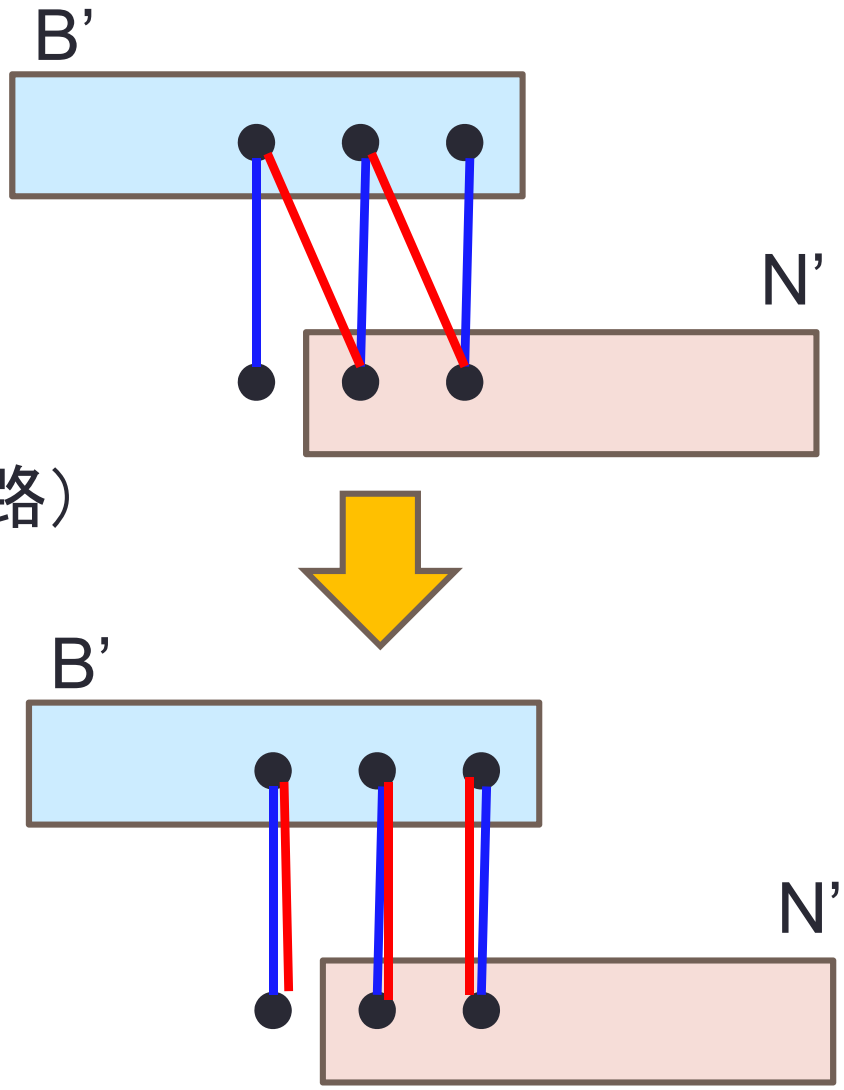
カバーされている（∵P は交互路）

∴ $L \cap P$ の枝を$M \cap P$の枝に

置き換えても，L は N' をカバーする

∴枝数奇数の交互路は存在しないと

仮定して良い

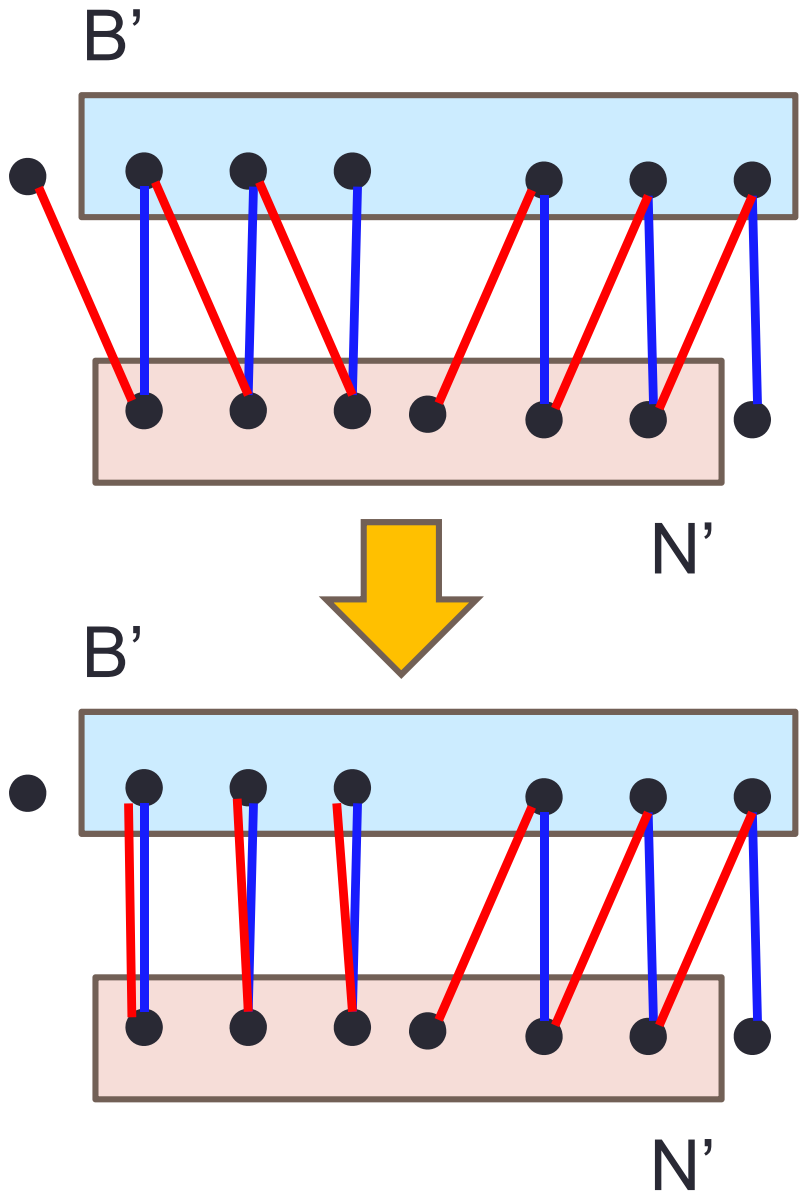


証明: 枝数偶数の交互路の扱い

枝数が偶数の交互路 P が存在する場合
$|M \cap P| = |L \cap P|$ が成立
∴ P の最初の枝は L に含まれ,
最後の枝は M に含まれると
仮定して良い

(i) P の最初の頂点が B に含まれる場合
このとき,
P の最初の頂点はカバーしなくてよい

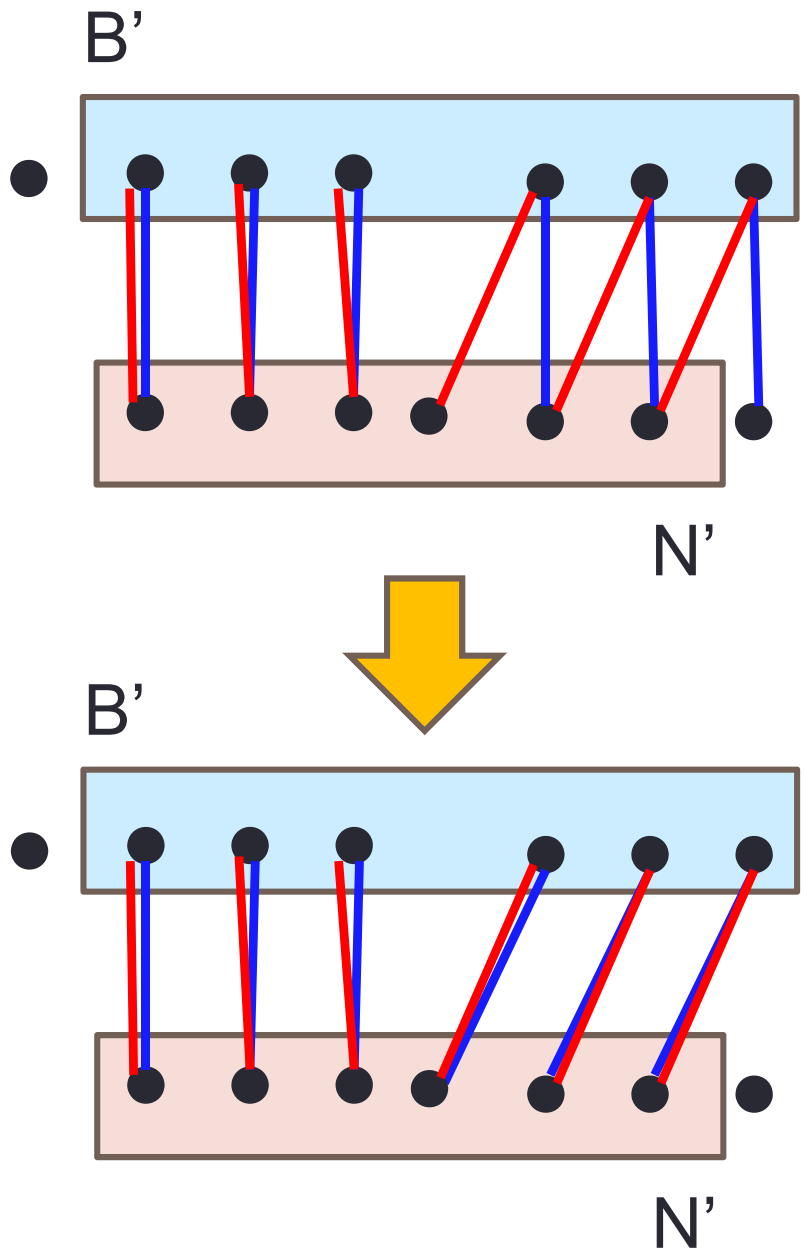
L ∩P の枝の下側端点は N' に含まれる
これらの端点は M∩P によっても
カバーされている(∵P は交互路)
∴ L∩P の枝をM∩Pの枝に
置き換えても, L は N' をカバーする



証明: 枝数偶数の交互路の扱い

枝数が偶数の交互路 P が存在する場合

(ii) P の最初の頂点が B に含まれる場合
P の最後の枝は M に含まれ,
P の最後の頂点は N に含まれる
➔ P の最後の頂点はカバーしなくてよい
あとは (i) の証明と同様にして
M∩P の枝をL∩Pの枝に置き換えると,
M は B' をカバーする



以上の修正により, 交互閉路･交互路がなくなった
∴ マッチング M と L は一致
∴ B' と N' を同時にカバーするマッチング

片側被覆制約と両側被覆制約の関係

命題　B’ ⊆ B および N’ ⊆ N に対し,
B’ をカバーするマッチング,
　　および N’ をカバーするマッチングがそれぞれ存在
　➔B’ と N’を同時にカバーするマッチングが存在

この命題およびその証明より,
B’ と N’を同時にカバーするマッチングは以下の手順で計算可能
(1) B’ をカバーするマッチング M を計算.
　存在しなければ，B’ ∪ N’をカバーするマッチングも存在しない
(2) N’ をカバーするマッチング L を計算.
　存在しなければ，B’ ∪ N’をカバーするマッチングも存在しない
(3) M と L の枝を使って，B’ ∪ N’をカバーするマッチングを計算
　（証明で説明したやり方を使えば簡単）

(1), (2) の計算方法は次回.

演習問題

下記のように評価値および均衡配分（赤丸）が与えられたときの均衡価格を，以下の手順で求めよ．

（1） 均衡の条件を不等式で書け．

（2）得られた条件に対応するグラフを書け．

（3）得られたグラフにおける最短路問題を解いて，不等式条件を満たす解（均衡価格）を計算せよ（アルゴリズムを使わず，直接計算して良い）

※ 得られた解が均衡価格の条件を満たしていることを確認せよ．

（i）

v(i,j)	A	B	C
①	2	3	6
②	6	7	7

（ii）

v(i,j)	A	B	C
①	3	1	0
②	7	6	7
③	1	7	8