

応用線形代数—第9回レポート

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
福田光浩

2019年度 第1クォーター

提出〆切 5月31日(金) 13時20分まで

レポートボックス 1-3 応用線形代数

1. 行列 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ の固有値を全て求めよ。また固有値が -1 に対応する固有ベクトルも求めよ。
2. 実数 $p \geq 1$ と n 次実対称行列 Q が与えられた時、その Schatten p ノルムを $\|Q\| = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \right)^{1/p}$ と定義する。ただし、 λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は Q の固有値である。
 - (a) $\|Q\| = 0$ であれば、 $Q = O$ を示せ。
 - (b) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して、 $\|\alpha Q\| = |\alpha| \|Q\|$ になることを示せ。
 - (c) $\|Q\|_{\text{spec}} = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|$ と定義する。 $\|Q\| \leq n^{1/p} \|Q\|_{\text{spec}}$ であることを示せ。
3. $A = (a_{ij})$ を n 次実対称行列、そしてその固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とする。

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$$

が成り立つことを示せ。