応用線形代数—第７回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１９年度 第１クォーター

提出〆切　５月２４日（金）　１３時２０分まで

レポートボックス １ー３　応用線形代数

以下の問題では Matlab/Octave を用いて答えよ．
また，学籍番号の一番最後の桁の数を a とする．例えば，17B56789 ならば $a = 9$ とする．

1. $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ と $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $\boldsymbol{A}$ のべき乗のうち $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \boldsymbol{A}^{10}, \boldsymbol{A}^{100}$ を求めよ．

(b) $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{100})^{-1}\boldsymbol{e}$ とするとき，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 1 成分を求めよ．

(c) 自然数 n に対する $\boldsymbol{A}^n$ を (a) の結果から推測し，数学的帰納法により証明せよ．

2. 3×3 の対称行列 $\boldsymbol{B}$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4\times(a+1) & a+1 & -\sqrt{a+1} \\ a+1 & 4\times(a+1) & -(a+1) \\ -\sqrt{a+1} & -(a+1) & 4\times(a+1) \end{pmatrix}$$

(a) $\boldsymbol{B}$ の固有値のうち，負の固有値の数を答えよ．

<u>(裏面もあることに注意せよ)</u>

(b) Matlab のコマンドで $[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{D}] = \mathrm{eig}(\boldsymbol{B})$ とすると，$\boldsymbol{B}$ の固有値を対角成分にもつ対角行列 $\boldsymbol{D}$ と固有ベクトルを列とする行列 $\boldsymbol{P}$ に分解できる．$\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ と $\boldsymbol{B}$ の差を Matlab のノルムで評価せよ．

3. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}$ と $\boldsymbol{b}$ を以下のようにして定義する．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 10^{a+5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-a-5} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) 線形方程式系 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{x}$ について解け．

(b) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ の差を Matlab のノルムで評価せよ．

(c) 上記の問題 2(b) と 3(b) で求まった値を比較して何か気が付いたことがあれば，簡単にその事実とその理由を書け．

4. n を十分大きな正整数とし，正方行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ をそれぞれ rand(n)，magic(n) というコマンドで生成する．また，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ をゼロでないベクトルとする．線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ を変数 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ で解いた際，それぞれにかかった計算時間は異なるか．解の精度つまり $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{c}$ の差，もしくは $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{c}$ の差についてはどうだろうか．違いがある場合はその理由などを議論せよ．