応用線形代数—第４回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１９年度 第 1 クォーター

提出〆切　５月８日（水）　１３時２０分まで

レポートボックス １ー３　応用線形代数

1. 線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ を Gauss-Jordan の消去法もしくは Gauss の消去法で解く場合，基本演算を順次行う．特に $\boldsymbol{A}$ のある行にゼロでない定数をかけたり，$\boldsymbol{A}$ の j 行に $\boldsymbol{A}$ の i 行のゼロでない定数倍を足した演算を行う．これらの 2 つ変換は線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の左からある行列 $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ をそれぞれかけることによって行うことができる．線形方程式系 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ が解を持ち，その解が一意である場合，これらの 2 つの変換を逐次行って得られた線形方程式系 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{c}$ も同じ解を持ち，一意であることを示せ．

2. 次の線形方程式系
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$
の行列が下三角行列であることをあらかじめ知らないとし，行もしくは列の交換（pivoting）をすることなく Gauss の消去法を用いて解け．

3. 上記のようにあらかじめ線形方程式系の行列の情報（構造や疎性）がわからない場合，どのように対処したらよいか簡潔に記述せよ．

4. T は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への線形写像であり，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ によって定められているとする．つまり $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax}$ であるとする．

   (a) T の値域 $I = \{T(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ に対して $\dim(I) \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$ であることを示せ．

   (b) $\boldsymbol{A}$ に対する条件で $\dim(I) = n$ となるために必要十分となる条件を示し，証明せよ．