応用線形代数—第２回レポート

東京工業大学　情報理工学院　数理・計算科学系
福田光浩

２０１９年度 第１クォーター

提出〆切　４月２３日（火）　１３時２０分まで

レポートボックス １ー３　応用線形代数

1. 正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して定義される行列のトレース，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ は線形写像であるか. そうでない場合は理由を述べよ.
2. 正方行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して定義される行列式 $\det(\boldsymbol{A})$ は線形写像であるか. そうでない場合は理由を述べよ.
3. $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 62 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$
   としたとき，$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$3\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ のランクを求めよ.（答えだけではなく，どのように求めたかも明記せよ.）
4. $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n} \in \mathbb{R}^m$ とし，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}$ は線形独立，また，任意の $i \geq r+1$ に対して，$\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot r}, \boldsymbol{a}_{\cdot i}$ は線形従属であると仮定する．この時，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつための必要十分条件は，線形方程式系 $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$ が解をもつことであることを証明せよ.
5. 与えられた行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して，以下が同値であることを示せ.
   (a) $\boldsymbol{A}$ の列 $\boldsymbol{a}_{\cdot 1}, \boldsymbol{a}_{\cdot 2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\cdot n}$ は線形独立である.
   (b) 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ が唯一存在する.
   (c) $\boldsymbol{A}$ は逆行列をもつ.