Nov. 18, 2019

集合と位相 第二　第14回 距離空間の完備性　補足

pp. 163–164 定理 2.50 の証明の補足

1. 証明 4 行目「X の部分集合族 $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに有限交叉性をもつ.」

$\{S_n\}$ は n に関して単調減少列，つまり $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \cdots$ だから，$S_{n_1}, \ldots, S_{n_k} \in \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\bigcap_{i=1}^{k} S_{n_i} = S_n \neq \emptyset$（ただし，$n \triangleq \max\{n_1, \ldots, n_k\}$）.

2. 証明 7–10 行目「このとき，任意の n に対して

$$\boldsymbol{d(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}}$$

となるような k_n を選ぶことができる．さらに，$k_1 < k_2 < \cdots$ となるようにできる.」

$x \in \overline{S_1}$ より $d(x, x_{k_1}) < 1$ なる $x_{k_1} \in S_1$ が存在する．$x \in \overline{S_{k_1+1}}$ より $d(x, x_{k_2}) < \frac{1}{2}$ なる $x_{k_2} \in S_{k_1+1}$ が存在する．$x \in \overline{S_{k_2+1}}$ より $d(x, x_{k_3}) < \frac{1}{3}$ なる $x_{k_3} \in S_{k_2+1}$ が存在する．以下同様.

3. 証明の最後から 3 行目「任意の n に対し $x \in F_n$ となる.」

$\{x_n\}$ の収束する部分列を $\{x_{k_n}\}$ とする．$\{F_n\}$ は単調減少列だから，任意の n に対してある M が存在しすべての $m \geq M$ に対して，$F_{k_m} \subset F_n$ ゆえ $\{x_{k_M}, x_{k_{M+1}}, x_{k_{M+2}}, \ldots\} \subset F_n$ となるので，$x_{k_n} \to x$ と F_n が閉集合であるという事実から，定理 2.38（教科書 p. 146）より $x \in F_n$ となる.

pp. 164–165 定理 2.49 の証明の補足

1. 証明 4 行目「$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 自身が収束する」

次の補題から従う.

補題　Cauchy 列の部分列が収束すれば，Cauchy 列自身も収束する.

証明．$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を Cauchy 列，$\{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を収束部分列，x を $\{x_{k_n}\}$ の極限点とし，任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．$x_{k_n} \to x$ より，$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0;$ $d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}$ である．また，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列なので $\exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N;$ $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ である．このとき，$m \geq N_0$ かつ $k_m \geq N$ なる m が存在するので，$\forall n \geq N$ に対して

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{k_m}) + d(x_{k_m}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

したがって，$x_n \to x$.

2. 証明の最後から 3 行目「$\{y_n\}$ がコーシー列になることがわかる.」

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \geq \frac{2}{\varepsilon}$ なる $N \in \mathbb{N}$ を取れば，$\forall m, n \geq N$ について，y_m, y_n はある $\frac{1}{N}$-開球体に属するので，

$$d(y_m, y_n) < 2\frac{1}{N} \leq \varepsilon$$