Oct. 21, 2019

集合と位相 第二　第6回 直積位相　補足

注意 2.3.3.A 位相空間族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の強位相と弱位相に関して

1) 直積の添え字集合 Λ が有限集合の場合，強位相と弱位相は一致する．

2) 添え字集合 Λ が無限集合の場合，一般に強位相と弱位相は異なる．

3) 添え字集合 Λ が無限集合であっても，強位相と弱位相が一致する場合がある．

証明． 1) 強位相と弱位相それぞれの定義から明らか．
2) 下の反例（例 2.3.3.A）による．
3) その下の例（例 2.3.3.B）による．(Q.E.D.)

例 2.3.3.A Λ を無限集合とし，各 $\lambda\in\Lambda$ に対して離散位相を持つ $X_\lambda \triangleq \{0,1\}$ を考え，$X \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．各 $\lambda\in\Lambda$ に対して $O_\lambda \triangleq \{0\}$ とし，$O \triangleq \prod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ を考える．O_λ: open in X_λ より強位相の定義から，O は強位相に関して open である．O は空でなく，弱位相の基 $\left\{\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda;\, U_\lambda\in\mathcal{U}_\lambda,\ \text{有限個の}\ \lambda\ \text{を除き}\ U_\lambda = X_\lambda\right\}$ の空でない要素 $\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を部分集合に持たないので，弱位相の基に属する集合の合併集合では表せない．すなわち O は弱位相に関して open ではない．

例 2.3.3.B Λ: 無限集合，$\forall\lambda\in\Lambda;\ X_\lambda$：密着位相空間とすると，定義から明らかに，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の強位相と弱位相は どちらも $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の密着位相なので，両者は一致する．