Oct. 07, 2019

集合と位相 第二　第4回 連続写像　補足

本資料では，次の命題 2.3.1.A を示す.

命題 2.3.1.A 同相という関係は，位相空間全体の集まりにおいて同値関係となる（教科書 p. 86）.

上の命題の証明のために，次の補題を使う.

補題 2.3.1.A $f\colon X \to Y$ とする．下の 2 式を満たす写像 $g\colon Y \to X$ が存在すれば，f は全単射であり，$g = f^{-1}$ である.

$$g \circ f \;=\; \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g \;=\; \mathrm{id}_Y.$$

証明. $g\colon Y \to X$，$g \circ f \;=\; \mathrm{id}_X$，$f \circ g \;=\; \mathrm{id}_Y$ とする．任意の $y \in Y$ に対して，$x = g(y)$ とおけば $x \in X$ であり $f(x) = f(g(y)) = \mathrm{id}_Y(y) = y$ なので，f は全射である．一方，$x, x' \in X$，$f(x) = f(x')$ とすると，$x = \mathrm{id}_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \mathrm{id}_X(x') = x'$ なので，f は単射である．よって f は全単射である．したがって 逆写像 f^{-1} が存在し，

$$g \;=\; g \circ \mathrm{id}_Y \;=\; g \circ (f \circ f^{-1}) \;=\; (g \circ f) \circ f^{-1} \;=\; \mathrm{id}_X \circ f^{-1} \;=\; f^{-1}. \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

系 2.3.1.A $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ がともに全単射であれば，$g \circ f\colon X \to Z$ も全単射であって，

$$(g \circ f)^{-1} \;=\; f^{-1} \circ g^{-1}.$$

証明. 写像の合成は結合律を満たすから，簡単な計算によって $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_X$ と $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_Z$ が示せて，上の補題 2.3.1.A から結論が従う．(Q.E.D.)

命題 2.3.1.A の証明.（反射律）任意の位相空間 X において，恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ は明らかに同相写像であるから $X \cong X$.
（対称律） $X \cong Y$ とすると，同相写像 $f : X \to Y$ が存在する．このとき，同相写像の定義から逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在し，f^{-1} も同相写像である．よって，$Y \cong X$.
（推移律） $X \cong Y$ かつ $Y \cong Z$ とすると，同相写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が存在する．このとき，系 2.3.1.A から $g \circ f : X \to Z$ は全単射であって，さらに教科書 定理 2.11 (p. 85) から連続である．系 2.3.1.A から $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であって，f と g が同相写像であることから f^{-1} と g^{-1} は連続なので，再び教科書 定理 2.11 (p. 85) から $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ が連続であることがわかる．よって $g \circ f : X \to Z$ は同相写像なので，$X \cong Z$．(Q.E.D.)