(1)➔(2)の証明

- (1) T は全域木（(V, T) は連結，かつ枝集合 T は閉路を含まない）
- (2) (V, T) の任意の2頂点の間に路はただ1つ存在

- T の頂点 u, v を任意に選ぶ.
- 定義により，全域木T は連結. ゆえに u, v の間に路は1つ以上存在. 異なる2つの路 P, P’ が存在すると仮定し，矛盾を導く.
- P, P’ は共に u から v への（異なる）路なので，

  2つの路を u から v の方へたどっていくと，途中である頂点 u’ にて

  P と P’ は分岐し，それぞれ異なる枝をたどった後，別の頂点 v’ にて

  合流する.

  P と P’ において，u’ と v’ の間の部分路を Q, Q’ とおくと，

  Q∪Q’ は閉路となる.

一方，全域木の定義により，T は閉路を含まない（矛盾）

(2)➔(3)の証明

- (2) (V, T) の任意の2頂点の間に路はただ1つ存在
- (3) (V, T) は連結，ただし T から任意の枝を削除すると非連結

- 条件(2)と連結性の定義より，(V, T) は連結.
- 任意に選んだ枝 (u,v)∈T に対し，T – (u,v)が連結であると仮定

➔ T – (u,v) において，u と v の間に路 P が存在.
よって，P は T において，枝 (u,v) を含まない u と v の間の路.
一方，枝 (u,v) は u と v の間の路, P とは異なる（矛盾）

(3)➔(1)の証明

- (3) (V, T) は連結，ただし T から任意の枝を削除すると非連結
- (1) T は全域木（(V, T) は連結，かつ枝集合 T は閉路を含まない）
- 枝集合 T が閉路を含まないことを，背理法により示す.
- T が閉路 C を含んでいると仮定する.
- (u,v)∈C を任意に選び，T’ = T-(u,v)とおく.
- 以下，(V, T’) が連結であることを示し，矛盾を導く.
- (V, T’) の連結性を示すため，T’ において，

  任意の２頂点x, y の間に路が存在することを示す.
- (V,T) は連結なので，に対し，xとyの間の路Pが存在

(case 1): P が(u,v)を含まない ➔ P は T’ に含まれる.

(case 2): P が(u,v)を含む ➔ C – (u,v) は u と v をつなぐ路なので，

P から (u,v) を削除して，C – (u,v) を加えると，x から y への路となる.

よって矛盾.

全域木の頂点数と枝数との関係

「全域木Tの枝数 ＝ Tの頂点数－１」の証明

頂点数に関する帰納法

[頂点数＝1のとき] このとき，全域木の枝数=0 なので成立.

[頂点数＝k > 1のとき] 全域木 T の枝 (u,v) を任意に選ぶ.

グラフ (V, T - (u,v)) はちょうど2つの連結成分 (V’, T’) と (V’’, T’’)をもつ

（第5回の演習問題）.

T’ は頂点 V’ に関する全域木，T’’ は頂点 V’’ に関する全域木.

k’=|V’|, k’’=|V’’| とおくと，k’+k’’=k なので，k’ < k, k’’ < k.

よって，帰納法の仮定により，|T’|=|V’| - 1, |T’’|=|V’’| - 1.

これらの式より，|T| = |T’| + |T’’| + 1 = |V’| + |V’’| - 1 = |V| - 1. ■