問１［17 点］

（１）: 下記の差分不等式系の解の有無を判定するために，最短路問題に帰着して計算したい．

$$x_b - x_a \leq -1, \qquad x_a - x_b \leq 3, \qquad x_c - x_a \leq 1,$$
$$x_c \leq 3, \qquad x_a \geq -4, \qquad x_b = 1$$

この不等式系に対応する有向グラフを書け．各枝にはその長さも書くこと．

（**解の有無を判定する必要はない**）

コメント： 等式 $x_b = 1$ の扱いが分かっていない学生が結構いた．

（２）: 有向グラフ$G = (V, E)$ および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられており，$s \in V$ とする．
頂点 s から任意の頂点 v への最短路が存在すると仮定する．

（２－１）$p(v)$ $(v \in V)$ がポテンシャルであることの定義を書け．

（２－２）任意の頂点 v に対し，頂点 s から頂点 v への最短路の長さ $d(v)$ とおく．このとき，
$d(v)$ はポテンシャルである．このことを証明せよ．

コメント：授業で説明したとおり，証明は簡単だが，出来ていない学生が多い．

（３）: 有向グラフ$G = (V, E)$ および各枝 (u, v) の長さ $\ell(u, v)$ が与えられており，負閉路は存在しないものとする．また，頂点の数は n 個とする．

このグラフの頂点 s から頂点 v への路 P について考える．路 P に含まれる枝数が n 個以上のとき，以下の２条件を満たす路 P' が存在する：

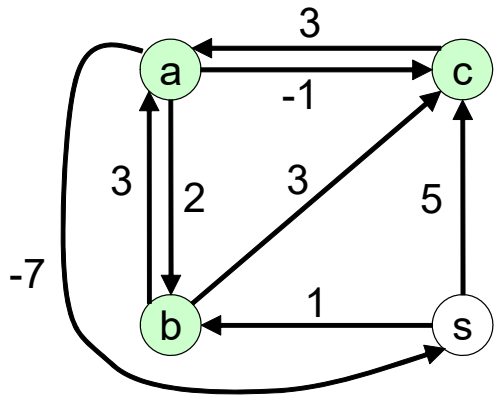
（i）路 P' の枝数は路 P の枝数より少ない，　（ii）路 P' の長さは路 P の長さ以下．

このことを証明せよ．

コメント：第１回目の講義で説明した定理の証明の一部分を使えばよい．
なお，問題の趣旨をふまえ，その定理自体を証明せずに使うことは認められない．

（４）: 右下の図で表された有向グラフに対して，頂点 s から各頂点 v への最短路が存在するか否かを判定したい．このグラフに対して，ベルマン・フォードのアルゴリズムを実行せよ（講義で説明したとおり，$d_k(v)$ の値の表を作成すればよい）．また，**その計算結果をふまえて**，この有向グラフに**頂点 s からすべての頂点 v への最短路が存在するか否かを判定せよ**．

コメント：繰り返しは４回目の反復まで行うこと．
４回目の反復においても数値が更新されることに注意．
「計算結果をふまえて」「判定せよ」の意味を分かっていない学生が多い

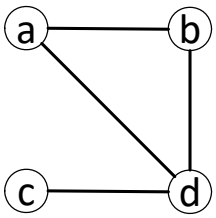


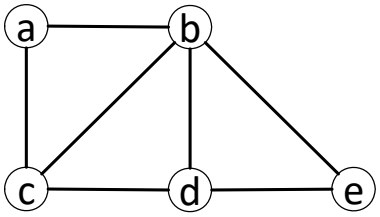
問２[14.5 点]

（1）:

（１－１）グラフにおけるマッチングの定義と頂点被覆の定義を書け.

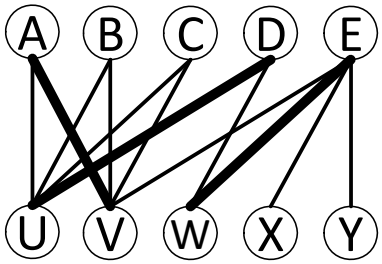
（１－２）下の２つのグラフそれぞれに対し，最大マッチングと最小頂点被覆を求めよ.
結果のみ書けば良い.





コメント：最大マッチングと最小頂点被覆の解を求めること．解の要素数を求めるのではない.
講義でも何度も注意しましたが，頂点被覆の定義をまだ分かっていない
学生が数名いました.

（2）: 右の二部グラフについて考える．太線はこのグラフの
マッチングを表す.



（２－１）このマッチングに対する増加路をひとつ求めよ.
結果のみ書けば良い.

（２－２）上記の（２－１）で求めた増加路を使って得られる，
新しいマッチングを書け．結果のみ書けば良い.

（２－３）上記の（２－２）で得られたマッチングが最大マッチングか否か，判定したい.

- 最大マッチングの場合は，このグラフの最小頂点被覆をひとつ求めよ．結果のみ書けば良い.
- 最大マッチングではない場合は，上記の（２－２）で得られたマッチングに対し，
増加路を求めよ．結果のみ書けば良い.

コメント：きわめて簡単な問題でした．ごく一部の学生を除いて全員できていました.

（3）: あるグラフにおけるマッチングを$M = \{(u_i, v_i) | i = 1,2, \dots, k\}$とする．以下の問いに答えよ.

（３－１）マッチング M に関する交互路の「重み」は，交互路に含まれる枝の重みを使って定義される．交互路の「重み」の定義を書け.

（３－２）マッチング M に関する，ある交互路 P について考える．交互路 P を用いて得られる新しいマッチングを M' とする．マッチング M' の重みを，マッチング M の重みと交互路 P の重みを用いて表せ.

（３－３）マッチング M が最大重みマッチングのとき，マッチング M に関する交互路で，
重みが正のものは存在しない．このことを証明せよ.

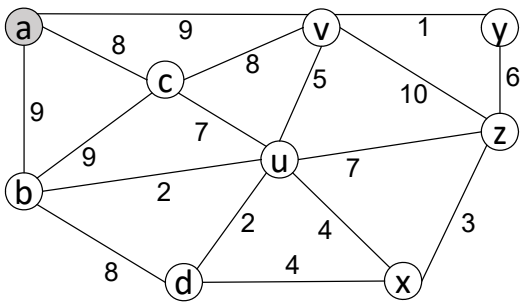
コメント：（３－２）の答えを見れば，簡単に証明できる.

（4）: 複数財のオークションを考える．入札者は a, b, c の 3 人，オークションにかけられる財は x, y, z の 3 つとする．各入札者の各財に対する満足度（評価値）は右表の通りとする．
このオークションにおける均衡割当と均衡価格を 1 つずつ求めよ（計算の過程は書く必要はない）．
また，ワルラス均衡の定義に基づき，求めた均衡割当と均衡価格が均衡の条件を満たしていることを示せ．

	a	b	c
x	6	1	8
y	1	5	3
z	3	7	6

コメント：均衡の条件が 2 種類あることに注意．

問３[18.5 点]



（１）: 右のグラフの最小全域木を，**クラスカル**のアルゴリズムおよび**プリム**のアルゴリズムを用いて計算せよ．**解答用紙のグラフにおいて，最小全域木の枝を太線で記入する**と共に，最小全域木の各枝に対して**追加された順番**を書くこと．プリムのアルゴリズムでは，**頂点 a を根とすること**.

コメント：一部の学生を除いて皆できていた.
複数の枝を１反復で選ぶのは禁止.

（２）: グラフ $G=(V,E)$ において，枝集合 T は全域木であるとする．以下の問いに答えよ.

（２－１）枝集合 T がグラフ $G=(V,E)$ の全域木であることの定義を書け.

（２－２）グラフ $G=(V,T)$ が連結であることの定義を書け.

（２－３）枝 (u,v) は T に含まれる枝とする．このとき，枝集合を $T-\{(u,v)\}$ とするグラフ $G=(V,T-\{(u,v)\})$ は連結でない．このことを，全域木の定義に基づいて証明せよ.

コメント：背理法を使えば簡単に示せる．背理法を使わなくても，もちろん示せる.

（３）: グラフ $G=(V,E)$ において，各枝 (u,v) に費用 $w(u,v)$ が与えられているとする．枝集合 T はこのグラフの**最小全域木**であるとする．以下の問いに答えよ.

（３－１） 枝 (s,t) は T に含まれない枝とする．このとき，枝集合 $T\cup\{(s,t)\}$ は閉路を含む．このことを証明せよ.

コメント：全域木の定義と連結性の定義から簡単に示せる.

（３－２） 枝集合 $T\cup\{(s,t)\}$ に含まれる閉路を C とする．閉路 C に含まれる枝のうち，その費用がもっとも大きい枝を (u,v) とし，$(u,v)\neq(s,t)$ と仮定する．T に枝 (s,t) を追加して，枝 (u,v) を削除して得られる枝集合 T^* （つまり，$T^*=T\cup\{(s,t)\}-\{(u,v)\}$）を考える．このとき，$T^*$ が全域木ならば，それは**最小全域木**である．このことを証明せよ.

コメント：講義資料（修正版）にて詳しく説明した部分．多くの学生が出来ていない.
枝（s, t）が閉路 C に含まれることを示す必要があるが，今回は書かなくても可とした.
なお，w(u, v) ＞ w(s, t) という不等号は誤り．正しくは w(u, v)≧w(s, t) となる.

（４）: グラフ $G=(V,E)$ のカットセット $E(V',V'')$ について考える.

（４－１）カットセット $E(V',V'')$ の定義を書け.

（４－２）P は頂点 $s\in V',t\in V''$ を結ぶ路とする．この路に含まれる枝で，カットセット $E(V',V'')$ に含まれるものが存在する．このことを証明せよ.

コメント：講義中に説明したとおり．あまり出来ていなかった.